

**Teil IX.**

**Homogenisierungstheorie**

# 28 Kapitel 28. Oszillierende Funktionen

## 28.1. Ein Homogenisierungsergebnis

Wir betrachten  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, darauf Koeffizienten  $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow [\lambda, \Lambda] \subset (0, \infty)$ , wobei  $\varepsilon = \varepsilon_k \searrow 0$  für  $k \rightarrow 0$ . Für  $f \in L^2(\Omega)$  wollen wir Lösungen  $u = u^\varepsilon$  der Gleichung

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \text{ in } \Omega, \quad (28.1)$$

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \quad (28.2)$$

untersuchen. Wir sind daran interessiert zu untersuchen, wie die Lösungen  $u^\varepsilon$  sich verhalten, wenn die Koeffizienten schnell oszillieren, nämlich auf der Längenskala  $\varepsilon$ . Das einfachste Modell hierfür ist wie folgt. Für

$$Y = [0, 1]^n, \quad a : \mathbb{R}^n \rightarrow [\lambda, \Lambda] \text{ sei } Y\text{-periodisch, d.h. } a(y) = a(k + y) \forall y \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n,$$

setzen wir

$$a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (28.3)$$

Um für die Lösung  $u^\varepsilon$  eine näherungsweise gültige Formel zu erhalten, fragen wir: Wenn  $u^\varepsilon$  eine Folge von Lösungen zu (28.1) mit Randbedingung (28.2) ist und  $u$  ein Limes der Folge  $u^\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , welche Gleichung beschreibt dann den Limes  $u$ ?

Ergebnis unserer Betrachtungen wird das folgende System für den Limes  $u$  sein, die sogenannte *homogenisierte Gleichung*:

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad (28.4)$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (28.5)$$

Der *effektive Koeffizient*  $a_*$  wird dabei ebenfalls bestimmt werden.

### Der eindimensionale Fall, $n = 1$ .

In diesem Fall betrachten wir auf  $\Omega = (0, b)$  die Gleichung

$$\partial_x \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_x u^\varepsilon(x) \right) = f(x),$$

wobei  $a : \mathbb{R} \rightarrow [\lambda, \Lambda]$  eine 1-periodische Funktion ist. Wir wollen hier annehmen, dass  $f \in L^1((0, b))$ .

Im eindimensionalen Fall lassen sich die Lösungen und der homogenisierte Koeffizient explizit als Integrale angeben. Mit einer Stammfunktion  $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  und einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  lässt sich die  $\varepsilon$ -Gleichung aufintegrieren zu

$$a^\varepsilon(x) \partial_x u^\varepsilon(x) = F(x) + c.$$

Wir lösen nach  $\partial_x u^\varepsilon$  auf, was bedeutet, dass wir die zwei oszillierenden Funktionen  $a^\varepsilon$  und  $u^\varepsilon$  trennen,

$$\partial_x u^\varepsilon(x) = \frac{1}{a(x/\varepsilon)} (F(x) + c),$$

und integrieren nochmals unter Verwendung der linken Randbedingung zu

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\xi/\varepsilon)} (F(\xi) + c) d\xi.$$

Für die schnell oszillierende periodische Funktion  $1/a^\varepsilon$  kann man erwarten, dass sie schwach gegen ihren Mittelwert konvergiert. Tatsächlich liefert Lemma 28.1 unten, dass

$$\frac{1}{a(\cdot/\varepsilon)} \rightharpoonup \frac{1}{a_*} \text{ schwach in } L^2((a, b)) \text{ für } a_* = \left[ \int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy \right]^{-1}$$

im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mit dieser schwachen Konvergenz und mit der Tatsache, dass  $F$  eine feste  $L^2$ -Funktion ist, schließen wir für alle  $x$

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\xi/\varepsilon)} (F(\xi) + c) d\xi \rightarrow \int_0^x \frac{1}{a_*} (F(\xi) + c) d\xi =: u(x).$$

Wegen der  $H^1((0, b))$ -Beschränktheit der Folge  $u^\varepsilon$  ist  $u$  dann zugleich der starke  $L^2$ -Limes von  $u^\varepsilon$ . Wir bilden die schwache Ableitung und multiplizieren mit  $a_*$  und erhalten auf  $(0, b)$

$$a_* \partial_x u = F + c.$$

Durch nochmaliges Differenzieren dann die gewünschte Grenzgleichung

$$\partial_x (a_* \partial_x u) = f, \quad u \in H_0^1((0, b)),$$

die Bedingung über den Funktionenraum deshalb, weil  $u$  gleichzeitig als der schwache Limes von  $u^\varepsilon$  in diesem Raum gewählt werden kann.

### Oszillierende Funktionen.

Wir wollen nun das oben verwendete Lemma über periodisch oszillierende Funktionen beweisen. Hier und auch in vielen anderen Zugängen ist es vorteilhaft, sich auch im  $\varepsilon$ -Problem die zellenweise Struktur deutlich zu machen. Unsere Notation ist für  $k \in \mathbb{Z}^n$

$$x_k = \varepsilon k, \quad Y_k^\varepsilon := \varepsilon(k + Y) = x_k + (0, \varepsilon)^n. \quad (28.6)$$

Wir verwenden auch die Indexmenge der Zellen, die ganz in  $\Omega$  liegen,

$$I_\varepsilon := \{k \in \mathbb{Z}^n \mid Y_k^\varepsilon \subset \Omega\}.$$

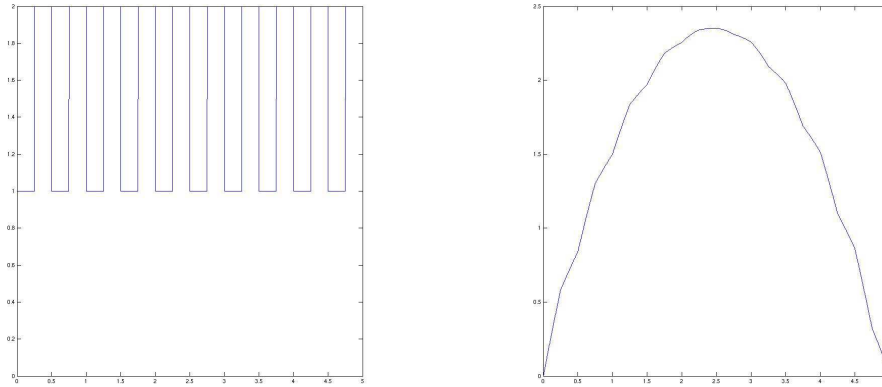


Abbildung 28.1.: Eindimensionale Homogenisierung. Links der oszillierende Koeffizient für  $\Omega = (0, b) = (0, 5)$  und  $\varepsilon = 0.5$ . Rechts die Lösung  $u^\varepsilon$  zu homogenen Dirichlet-Randwerten und rechter Seite  $f \equiv -1$ .

Wir müssen uns noch klarmachen, dass dies in einem gewissen Sinne genügend Zellen sind, das heißt, dass die Zellen am Rand keine wesentliche Rolle spielen. Dazu betrachten wir zusätzlich auch die Indexmenge  $I_\varepsilon^*$  aller  $k \in \mathbb{Z}^n$  mit  $Y_k^\varepsilon \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ . Wir betrachten im Folgenden nur beschränkte  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-Rand. Für solche Mengen gilt für das Lebesgue-Maß

$$\left| \bigcup_{k \in I_\varepsilon^* \setminus I_\varepsilon} Y_k^\varepsilon \right| \rightarrow 0,$$

weil die Vereinigung in einer  $\varepsilon\sqrt{n}$ -Umgebung des Randes enthalten ist.

Wir haben es in der periodischen Homogenisierung mit Funktionen zu tun, die auf benachbarten Zellen  $Y_k$  und  $Y_{k+e_i}$  ähnlich aussehen. Die einfachste solche Funktion ist eine exakt periodische Funktion.

**Lemma 28.1** (Eigenschaften oszillierender Funktionen I). *Für  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L^2(Y)$  und beschränktes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-Rand bilden wir die oszillierende Funktion*

$$\psi^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi^\varepsilon(x) = \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Dann ist  $\psi^\varepsilon$  beschränkt in  $L^2(\Omega)$  und es gilt

$$\psi^\varepsilon \rightharpoonup \bar{\psi} = \int_Y \psi(y) dy \in \mathbb{R}. \tag{28.7}$$

Die rechte Seite ist der Mittelwert von  $\psi$  wegen  $|Y| = 1$ .

*Beweis.* Für die Beschränktheit rechnen wir

$$\int_\Omega |\psi^\varepsilon|^2 \leq \sum_{k \in I_\varepsilon^*} \int_{Y_k^\varepsilon} |\psi^\varepsilon|^2 = \sum_{k \in I_\varepsilon^*} |Y_k^\varepsilon| \int_Y |\psi^\varepsilon(k + \varepsilon y)|^2 dy = \left( \sum_{k \in I_\varepsilon^*} |Y_k^\varepsilon| \right) \int_Y |\psi(y)|^2 dy,$$

und die Klammer konvergiert gegen  $|\Omega|$ , ist also insbesondere beschränkt. Aus der Beschränktheit folgt die schwache Konvergenz für eine Teilfolge. Der Limes kann mit einer Lipschitz-stetigen Testfunktion  $\varphi$  mit kompaktem Träger bestimmt werden. Für kleine  $\varepsilon$ , so dass der Träger von  $\varphi$  in  $\cup_{k \in I_\varepsilon} Y_k^\varepsilon$  gilt mit einem Fehler, der wegen der Lipschitz-Bedingung die Ordnung  $\varepsilon$  hat,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^\varepsilon \varphi &= \sum_{k \in I_\varepsilon} \int_{Y_k^\varepsilon} \psi^\varepsilon \varphi = \sum_{k \in I_\varepsilon} \int_{Y_k^\varepsilon} \psi^\varepsilon \varphi(x_k) + O(\varepsilon) = \sum_{k \in I_\varepsilon} |Y_k^\varepsilon| \varphi(x_k) \int_Y \psi(y) dy + O(\varepsilon) \\ &= \left( \int_{\Omega} \varphi \right) \int_Y \psi(y) dy + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

also die Behauptung.  $\square$

### Ansatz für die $\varepsilon$ -Lösung im $\mathbb{R}^n$ .

Wir wollen hier eine formale Rechnung angeben, mit der wir viel über das qualitative Verhalten von Lösungen lernen können. Wie im Eindimensionalen nehmen wir allgemein für  $n \geq 1$  an, dass die Lösung sich zusammensetzt aus einem Teil  $u_0$ , der das makroskopische Verhalten beschreibt, und einer kleinen Störung, die den mikroskopisch inhomogenen Koeffizienten Rechnung trägt, also

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (28.8)$$

Für diesen Ansatz berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla u_\varepsilon(x) &= \nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{und} \\ \nabla \cdot \left( a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right)(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_0(x) + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \Delta_x u_0(x) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \left( a \nabla_y u_1 \right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Wir erwarten, dass keine Terme der Ordnung  $\varepsilon^{-1}$  auftauchen, dass also für jedes feste  $x$  und  $\xi = \nabla u_0(x)$

$$\nabla_y \cdot \left( a(y)(\xi + \nabla_y u_1(y)) \right) = 0 \quad \text{in } Y. \quad (28.9)$$

Dies ist die erste Form des *Zellproblems*. Wir nehmen dabei an, dass die Funktion  $u_1$  das periodische Verhalten der Koeffizienten aufnimmt und selbst eine  $Y$ -periodische Funktion ist.

Wir interpretieren die Situation wie folgt: Zu gegebenem  $\xi = \nabla u_0(x)$  kann die Gleichung (28.9) eindeutig mit einer periodischen Funktion  $u_1 \in H^1(Y)$  gelöst werden, die Lösung hängt linear von  $\xi$  ab. Es ist sinnvoll, sich den Ausdruck in Komponenten zu zerlegen. Wenn wir für  $\xi$  die Einheitsvektoren  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  einsetzen, so lösen wir für  $\chi_k \in H_{per}^1(Y)$  die Gleichung

$$\nabla_y \cdot \left( a(y)(e_k + \nabla_y \chi_k(y)) \right) = 0 \quad \text{in } Y. \quad (28.10)$$

Dabei verwenden wir den Raum  $H_{per}^1(Y)$  der Funktionen aus  $H^1(Y)$ , deren  $Y$ -periodische Fortsetzungen auf  $\mathbb{R}^n$  eine  $H_{loc}^1$ -Funktion ist. Mit diesen Elementarlösungen lässt sich

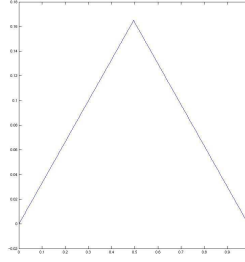


Abbildung 28.2.: Die Zelllösung im eindimensionalen Fall für stückweise konstante Leitfähigkeit  $a(y)$ .

die Lösung  $u_1$  von (28.9) für  $\xi = \sum_k \partial_{x_k} u_0(x) e_k$  zusammensetzen als

$$u_1(y) = \sum_k \partial_{x_k} u_0(x) \chi_k(y).$$

Insbesondere gilt

$$a_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) = \sum_k \partial_{x_k} u_0(x) [a(x/\varepsilon)(e_k + \nabla_y \chi_k(x/\varepsilon))] + O(\varepsilon),$$

und nach Mittelung über die schnellen Oszillationen erwarten wir

$$a_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \rightharpoonup \sum_k \partial_{x_k} u_0(x) a_{*,k} = a_* \cdot \nabla u_0(x)$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dabei ist  $a_{*,k}$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ , der den gemittelten Fluss angibt, wenn der mittlere Gradient der Lösung  $\nabla u_0(x) \in \mathbb{R}^n$  ist. Aus den Vektoren  $a_{*,k}$  bilden wir die Matrix  $a_* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Da der Limes der rechten Seite ein linearer Ausdruck in  $\nabla u_0(x)$  ist, muss sein Wert durch eine geeignete Matrix  $a_*$  gegeben sein. Die Matrixelemente lassen sich relativ explizit angeben als

$$a_{*,l,k} = \int_Y [a(y)(e_k + \nabla_y \chi_k(y))] \cdot e_l, \quad (28.11)$$

wobei  $\chi_k$  das Zellproblem (28.10) löst. Damit läßt sich nun leicht die Gleichung für  $u_0 = \lim_\varepsilon u^\varepsilon$  angeben. Wegen  $\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f$  gilt auch für den Limes des Argumentes  $a_* \cdot \nabla u_0(x)$  die Divergenzgleichung

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u_0(x)) = f \text{ in } \Omega.$$

Dies ist die gesuchte homogenisierte Gleichung.

Wir erraten aufgrund der obigen Überlegungen den folgenden Satz. Im Verlauf dieses Kapitels werden wir vier verschiedene Beweise angeben und so verschiedene Methoden der Homogenisierung vorführen.

**Satz 28.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  Koeffizienten zu  $Y$ -periodischem messbaren  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow [\lambda, \Lambda]$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  die Lösungen zu

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \text{ in } \Omega. \quad (28.12)$$

Dann gilt  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  für die eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u(x)) = f \text{ in } \Omega. \quad (28.13)$$

Dabei ist  $a_*$  durch (28.11) mit  $\chi_k$  aus (28.10) gegeben.

### Ein Beweis mit oszillierenden Testfunktionen.

Bei der Methode der oszillierenden Testfunktionen konstruiert man geeignete  $\varphi^\varepsilon$ , mit denen man die  $\varepsilon$ -Gleichung testet. Wenn wir versuchen, die Gleichung mit einer glatten Funktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  zu testen, so entstehen nach partieller Integration Terme der Form  $\nabla(a_\varepsilon^T \varphi)$ , bei denen die Differentiation von  $a_\varepsilon$  Beiträge der Ordnung  $1/\varepsilon$  liefert. Stattdessen müssen wir  $\varphi$  modifizieren, so dass diese Terme höchster Ordnung nicht auftreten.

Wir denken hier an skalare Koeffizienten  $a$ , wollen aber unsere Rechnungen so halten, dass sie auch für Diffusionsmatrizen  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  gültig bleiben. In diesem Fall muss man das duale Zellproblem verwenden, denn wir wollen ja eine Testfunktion konstruieren. Für das duale Problem verwendet man die transponierte Matrix  $a^T(y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und findet dazu eine neue Lösung, die wir mit  $\chi_k^T$  bezeichnen.

$$\nabla_y \cdot \left( a^T(y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \right) = 0 \text{ in } Y. \quad (28.14)$$

Für skalare Koeffizienten  $a$  gilt natürlich  $a^T = a$  und  $\chi_k^T = \chi_k$ . Damit definieren wir nun einen homogenisierten Koeffizienten  $a^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  als

$$a_{l,k}^* := \int_Y \left[ a^T(y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \right] \cdot e_l, \quad (28.15)$$

im Falle von skalaren Koeffizienten also  $a_{l,k}^* = a_{*,l,k}$ . Wir wollen nun im allgemeinen Fall nachweisen, dass  $a^* = a_*^T$ , im skalaren Fall ergibt sich daraus, dass die Matrix  $a_* = a^*$  symmetrisch ist. Dies geschieht mit einer direkten Rechnung durch Testen der Gleichung (28.14) mit  $\chi_l$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Y \left( a^T(y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \right) \cdot \nabla_y \chi_l(y) dy \\ &= \int_Y (e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \cdot a(y)(e_l + \nabla_y \chi_l(y)) dy - \int_Y (e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \cdot a(y)e_l \\ &= \int_Y e_k \cdot a(y)(e_l + \nabla_y \chi_l(y)) dy - \int_Y a^T(y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(y)) \cdot e_l. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist gerade  $a_{*,k,l}$ , das zweite  $a_{l,k}^*$ , es gilt also  $a^* = a_*^T$ .

1. *Beweis von Satz 28.2.* Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  beliebig. Wir konstruieren mit Hilfe der Lösungen  $\chi_k^T$  des dualen Zellproblems die Testfunktion  $\varphi^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\varphi^\varepsilon(x) := \varphi(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad \varphi_1(x, y) := \sum_k \partial_{x_k} \varphi(x) \chi_k^T(y). \quad (28.16)$$

Wir testen nun die  $\varepsilon$ -Gleichung (28.12) mit  $\varphi^\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \int_\Omega f \varphi^\varepsilon &= - \int_\Omega a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi^\varepsilon \\ &= - \int_\Omega a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \sum_k \left[ \partial_{x_k} \varphi(x) e_k + \partial_{x_k} \varphi(x) \nabla_y \chi_k^T(x/\varepsilon) \right] + \delta_1(\varepsilon) \\ &= \int_\Omega u^\varepsilon \sum_k \nabla \cdot \left( \partial_{x_k} \varphi(x) a^T(x/\varepsilon) \left[ e_k + \nabla_y \chi_k^T(x/\varepsilon) \right] \right) + \delta_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei  $\delta_1(\varepsilon)$  der Fehlerterm

$$\delta_1(\varepsilon) := \varepsilon \int_{\Omega} a_{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} \cdot \sum_k (\nabla \partial_{x_k} \varphi(x)) \chi_k^T(x/\varepsilon) \rightarrow 0$$

ist, die Konvergenz für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt, weil  $\nabla u^{\varepsilon}$  und  $\chi_k(\cdot/\varepsilon)$  beschränkt sind in  $L^2(\Omega)$ . Wir können nun in der getesteten Gleichung zum Limes übergehen. Auf der linken Seite nutzen wir wieder  $\varepsilon \varphi_1(\cdot, \cdot/\varepsilon) \rightarrow 0$  in  $L^2(\Omega)$ , also  $\varphi^{\varepsilon} \rightarrow \varphi$ . Auf der rechten Seite ist entscheidend, dass die Divergenz von  $a^T(e_k + \nabla_y \chi_k^T)$  verschwindet. Wir finden wegen Lemma 28.1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \varphi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f \varphi^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \sum_k \nabla \partial_{x_k} \varphi(x) \cdot a^T(x/\varepsilon) [e_k + \nabla \chi_k^T(x/\varepsilon)] \\ &= \int_{\Omega} u(x) \sum_{k,l} a_{l,k}^* \partial_{x_l} \partial_{x_k} \varphi(x) = \int_{\Omega} \nabla \cdot (a_* \nabla u) \varphi. \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  beliebig war, haben wir damit das behauptete Limesproblem erhalten.  $\square$

Wir beschränken uns in dieser Darstellung immer auf den Fall strikt positiver Leitfähigkeiten. Allerdings kann die Leitfähigkeit degeneriert sein wie in der porösen Medien Gleichung, dies kann zum Beispiel zu Öl-Einschlüssen in porösen Medien führen. Eine Homogenisierung in einem solchen degenerierten Fall wurde in [55] durchgeführt.

## 28.2. Das div-curl Lemma

Wir wollen zur Einstimmung folgende Konsequenz aus der partiellen Integration ziehen. Zu  $Q \subset \mathbb{R}^N$  seien  $q^{\varepsilon}, \nabla u^{\varepsilon}$  Folgen glatter Funktionen in  $L^2(Q, \mathbb{R}^N)$  mit

$$q^{\varepsilon} \rightharpoonup q, \quad \nabla u^{\varepsilon} \rightharpoonup \nabla u \text{ in } L^2(Q).$$

Von  $u^{\varepsilon}$  sei weiterhin bekannt, dass die  $L^2(Q)$ -Norm beschränkt bleibt, so dass wir  $u^{\varepsilon} \rightharpoonup u$  in  $H^1(Q)$  und  $u^{\varepsilon} \rightarrow u$  in  $L^2(Q)$  für eine Teilfolge erhalten.

Wir beobachten, dass über eine Konvergenz des Produktes  $\psi^{\varepsilon}$

$$\psi^{\varepsilon}(x) := q^{\varepsilon}(x) \nabla u^{\varepsilon}(x)$$

im Allgemeinen keine Aussage gemacht werden kann, denn beide Faktoren konvergieren nur schwach in  $L^2$ . Die Lage ist ganz anders, wenn wir zum Beispiel eine Information über die Divergenz von  $q^{\varepsilon}$  haben, etwa, dass  $\nabla \cdot q^{\varepsilon} = f^{\varepsilon} \rightarrow f$  in  $H^{-1}$  gilt. Dann rechnen wir für eine Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(Q, \mathbb{R})$  mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_Q q^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} \varphi &= \int_Q u^{\varepsilon} \nabla \cdot (q^{\varepsilon} \varphi) = \int_Q u^{\varepsilon} f^{\varepsilon} \varphi + u^{\varepsilon} q^{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi \\ &= \langle f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon} \varphi \rangle + \int_Q u^{\varepsilon} q^{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi \rightarrow \langle f, u \varphi \rangle + \int_Q u q \cdot \nabla \varphi, \end{aligned}$$

da jeweils eine starke und eine schwache Konvergenz aufeinandertrifft. Die rechte Seite kann wieder als Integral über  $q \cdot \nabla u \varphi$  gelesen werden, so dass also  $q^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon}$  im Distributionssinn gegen  $q \cdot \nabla u \varphi$  konvergiert.



**Lemma 28.3** (Kompensierte Kompaktheit / div-curl Lemma). Sei  $Q \subset \mathbb{R}^N$  und  $q^\varepsilon, v^\varepsilon$  Folgen in  $L^2(Q, \mathbb{R}^N)$  mit

$$q^\varepsilon \rightharpoonup q, \quad v^\varepsilon \rightharpoonup v \text{ in } L^2(Q).$$

Zusätzlich gelte  $\operatorname{curl} v^\varepsilon = 0$  auf  $Q$  und die Folge  $\nabla \cdot q^\varepsilon$  sei kompakt in  $H^{-1}(Q)$ . Dann

$$q^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \xrightarrow{*} q \cdot v$$

im Distributionssinn.

*Bemerkung.* Zusätzlich zur distributionellen Konvergenz gilt die Beschränktheit der Folge in  $L^1(Q)$  wegen

$$\|q^\varepsilon \cdot v^\varepsilon\|_{L^1(Q)} \leq \|q^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \|v^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C.$$

Diese Zusatzinformation beinhaltet eine gewisse Kontrolle der Funktionen am Rand beziehungsweise im Unendlichen. Gilt neben der distributionellen Konvergenz auch eine  $L^1$ -Beschränktheit, so spricht man auch von  $*$ -schwacher Konvergenz der Folge.

*Beweis.* Wir müssen die distributionelle Konvergenz zu zeigen. Dazu sei  $\varphi \in \mathcal{D}(Q, \mathbb{R})$  eine Testfunktion. Durch eine Teilung der 1 genügt es, Testfunktionen mit einem kompakten Träger in offenen Kugeln  $B = B_R(x_0) \subset Q$  zu betrachten. Auf der Kugel  $B$  finden wir zur curl-freien Folge von Felder  $v^\varepsilon$  Potentiale, also  $\phi^\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v^\varepsilon = \nabla \phi^\varepsilon$ ; die Potentiale erfüllen keine Randbedingungen, aber das wird nicht relevant sein. Wir wählen die Potentiale so, dass der Mittelwert verschwindet. Wegen der Poincaré Ungleichung stellen wir dann fest, dass  $\phi^\varepsilon$  beschränkt ist in  $H^1(B)$ , wir finden eine Teilfolge mit  $\phi^\varepsilon \rightharpoonup \phi$  in  $H^1(B)$  und stark in  $L^2(B)$ .

Nach Voraussetzung ist  $\nabla \cdot q^\varepsilon$  kompakt in  $H^{-1}(Q)$ . Wir können daher zu einer konvergenten Teilfolge übergehen und haben  $\nabla \cdot q^\varepsilon \rightarrow \nabla \cdot q$  in  $H^{-1}(Q)$ . Dabei gilt zunächst  $\nabla \cdot q^\varepsilon \rightarrow \zeta$  für einen  $H^{-1}$ -Limes  $\zeta$ . Gleichzeitig können wir die schwache  $L^2$ -Konvergenz von  $q^\varepsilon$  gegen einen Limes  $q$  annehmen. Der distributionelle Limes vertauscht mit Ableitungen, daher gilt tatsächlich  $\zeta = \nabla \cdot q$ .

Damit können wir die Konvergenz nachrechnen; wir verwenden für zwei Terme, dass eine schwach konvergente Folge in dualer Paarung eine stark konvergente Folge trifft.

$$\begin{aligned} \int_Q q^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \varphi &= \int_B q^\varepsilon \cdot \nabla \phi^\varepsilon \varphi = \int_B \phi^\varepsilon \nabla \cdot (q^\varepsilon \varphi) = \int_B \phi^\varepsilon (\nabla \cdot q^\varepsilon \varphi + q^\varepsilon \cdot \nabla \varphi) \\ &\rightarrow \int_B \phi \nabla \cdot q \varphi + \phi q \cdot \nabla \varphi = \int_B \nabla \phi \cdot q \varphi = \int_Q q \cdot v \varphi, \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

**Übung 28.1** (Allgemeineres div-curl Lemma). Zeigen Sie das Resultat des Lemmas, wenn anstelle von  $\operatorname{curl} v^\varepsilon = 0$  nur vorausgesetzt ist, dass

$$\operatorname{curl} v^\varepsilon \text{ kompakt in } H^{-1}(Q).$$

*Hinweis:* Man reduziere zunächst mit Hilfe einer Funktion  $F \in L^2(Q)$  mit vorgegebenem curl auf den Fall  $\operatorname{curl} v^\varepsilon \rightarrow 0$  in  $H^{-1}(Q)$ . Im verbleibenden speziellen Fall zerlege man  $v^\varepsilon$  in  $v^\varepsilon = \nabla u^\varepsilon + w^\varepsilon$ , wobei  $w^\varepsilon \rightarrow 0$  stark in  $L^2(Q)$  (vergleiche für beide Teile mit Übung 14.6).

## 28.3. Neue Zugänge zum Homogenisierungslimes

### Oszillierende Testfunktionen in neuem Rahmen

2. *Beweis von Satz 28.2.* Wir betrachten wieder die Lösungen  $\chi_k^T$  des (dualen) Zellproblems (28.14) und konstruieren daraus die oszillierenden Testfunktionen

$$\varphi_k^\varepsilon(x) = x \cdot e_k + \varepsilon \chi_k^T(x/\varepsilon).$$

Die Gradienten

$$\psi_k^\varepsilon(x) = \nabla \varphi_k^\varepsilon(x) = e_k + \nabla_y \chi_k^T(x/\varepsilon).$$

erfüllen

$$\operatorname{curl} \psi_k = 0, \quad \nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon) = 0, \quad \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \text{ in } L^2(\Omega), \quad (28.17)$$

die letzte Eigenschaft wegen Lemma 28.1. Die homogenisierte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch den schwachen Limes des Produktes. Wegen (28.15) unter nochmaliger Verwendung von Lemma 28.1

$$a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a_{*,k}^* = a^* e_k.$$

Wir wollen wieder den Standpunkt erwähnen, dass man diesen schwachen Limes auch als die definierende Relation von  $a_* = (a^*)^T$  ansehen kann.

Wir betrachten nun außer dem Limes  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  auch noch die Limiten der Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} p^\varepsilon &:= a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ in } L^2(\Omega), \\ \xi^\varepsilon &:= \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, dass wir in der Erhaltungsgleichung sofort zum Limes übergehen können,

$$\nabla \cdot p^\varepsilon = f \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot p = f \text{ in } \Omega.$$

Wegen  $u \in H_0^1(\Omega)$  ist auch die Randbedingung erfüllt.

Der Beweis ist abgeschlossen, sobald wir aus der Relation  $p^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon$  folgern können, dass

$$p = a_* \xi. \quad (28.18)$$

Dies geschieht mit der Testfunktion  $\psi_k^\varepsilon$  aus Schritt 1 und der kompensierten Kompaktheit. Es gilt

$$p^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = \xi^\varepsilon \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon).$$

Wir verwenden für beide Seiten die kompensierte Kompaktheit.

Links gilt  $p^\varepsilon \rightharpoonup p$  und  $\psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega)$ . Gleichzeitig ist  $\nabla \cdot p^\varepsilon = f$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega)$  und  $\operatorname{curl} \psi_k^\varepsilon = 0$ . Also konvergiert die linke Seite distributionell gegen  $p \cdot e_k$ .

Auf der rechten Seite gilt  $\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi$  und  $a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a_*^T e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega)$ . Gleichzeitig ist  $\operatorname{curl} \xi^\varepsilon = 0$  und  $\nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon) = 0$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega)$ . Also konvergiert die rechte Seite distributionell gegen  $\xi \cdot (a_*^T e_k)$ .

$$p \cdot e_k = \xi \cdot (a_*^T e_k) = (a_* \xi) \cdot e_k.$$

Da  $k \leq n$  beliebig war, erhalten wir (28.18).  $\square$

## Vergleich der Lösung mit expliziter Konstruktion

3. *Beweis von Satz 28.2.* Wir gehen hier von einer zusätzlichen Regularität der Lösung aus, um die Idee des Beweises deutlich zu machen. Wir benötigen, dass die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  der effektiven Gleichung (28.13) die Regularität  $u \in H^2(\Omega)$  besitzt. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn das Grundgebiet ein Quader ist (Satz 6.12) oder der Rand  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^2$  ist (Satz 6.14).

Wir bezeichnen den  $H^1(\Omega)$ -schwachen Limes der  $u^\varepsilon$  mit  $u^0$ . Unser Ziel ist es,  $u = u^0$  zu beweisen.

Wir wollen in diesem sehr direkten Beweis die Lösung  $u^\varepsilon$  mit einer Funktion vergleichen, die möglichst genau das Verhalten der Lösung hat. Wir verwenden die Lösung  $u$  des homogenisierten Problems  $\nabla \cdot (a_* \nabla u) = f$ . Um Probleme am Rand zu vermeiden, approximieren wir diese Lösung  $u$  mit einer Funktion  $u_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $u_h \rightarrow u$  in  $H^2(\Omega)$ . Eine Funktion, die makroskopisch wie  $u_h$  aussieht, mikroskopisch aber wie eine Lösung der Gleichung, kann konstruiert werden als

$$v^\varepsilon(x) = u_h(x) + \varepsilon \sum_k \partial_k u_h(x) \chi_k(x/\varepsilon). \quad (28.19)$$

Wegen  $u_h \rightarrow u$  in  $H^2$  löst die Funktion  $u_h$  näherungsweise die homogenisierte Gleichung,

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u_h) = f_h \rightarrow f \text{ in } L^2(\Omega).$$

Wir vergleichen nun diese Gleichung für  $u_h$  und die  $\varepsilon$ -Gleichung für  $u^\varepsilon$  und bilden

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u_h - a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f_h - f \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega).$$

Diese Relation testen wir mit einer Differenz von Lösungen, genauer mit  $v^\varepsilon - u^\varepsilon = u_h(x) + \varepsilon \sum_k \partial_k u_h(x) \chi_k(x/\varepsilon) - u^\varepsilon$ . Es entsteht, durch Einschieben von  $a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_h - f)(v^\varepsilon - u^\varepsilon) &= \int_\Omega [a_* \nabla u_h - a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon + a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon] \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon) \\ &= \int_\Omega \langle a_\varepsilon \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon) \rangle \\ &\quad + \int_\Omega \left[ a_* \nabla u_h - a_\varepsilon \sum_k \partial_k u_h (e_k + \nabla_y \chi_k(\cdot/\varepsilon)) \right] \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon) \\ &\quad - \varepsilon \int_\Omega a_\varepsilon \sum_k (\nabla \partial_k u_h) \chi_k(\cdot/\varepsilon) \cdot \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon). \end{aligned}$$

Das erste Integral der rechten Seite kontrolliert die Norm des Fehlers,

$$\int_\Omega \langle a_\varepsilon \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon) \rangle \geq \lambda \|\nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Für die Behandlung des zweiten Integral verwenden wir wieder die kompensierte Kompaktheit. Nach Definition von  $a_*$  gilt

$$\left[ a_* \nabla u_h - a_\varepsilon \sum_k \partial_k u_h (e_k + \nabla_y \chi_k(\cdot/\varepsilon)) \right] \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega),$$

zudem hat dieser Ausdruck eine in  $L^2$  beschränkte Divergenz nach Konstruktion von  $\chi_k$ . Insbesondere ist die Divergenz stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega)$ , siehe Übung 28.2. Der andere Faktor unter dem Integral ist  $\nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon)$ . Dieser ist beschränkt und konvergiert schwach in  $L^2$ , er ist gleichzeitig ein Gradient, also curl-frei. Lemma 28.3 ist anwendbar und liefert im Limes das Verschwinden des Integrals.

Das letzte Integral schließlich ist durch die  $H^1$ -Beschränktheit von  $u^\varepsilon$ ,  $v^\varepsilon$  und  $\chi_k$  von der Ordnung  $\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wir erhalten daher im Limes wegen  $v^\varepsilon \rightarrow u_h$  und  $u^\varepsilon \rightarrow u^0$  schwach in  $H^1(\Omega)$

$$\lambda \|\nabla(u_h - u^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda \|\nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (f_h - f)(u_h - u^0).$$

Eine Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Poincaré Ungleichung liefert

$$\|u_h - u^0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f_h - f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da  $h$  beliebig war und  $u_h \rightarrow u$  für  $h \rightarrow 0$  gilt daher  $u = u^0$ .  $\square$

Wir betrachten den soeben geführten dritten Beweis als eine Variante der vorigen Beweise. Der Unterschied besteht darin, dass man nicht beliebige makroskopische Testfunktionen  $\varphi$  zur Lokalisierung betrachtet, sondern nur die spezielle Funktion  $u$  benutzt beziehungsweise die geglättete Variante  $u_h$ . Diese spezielle Testfunktion liefert dann sofort Relationen für den Abstand zwischen  $u^\varepsilon$  und  $u$  (bzw.  $u_h$ ).

Wir bemerken zudem, dass der obige Beweis nicht das duale Zellproblem verwendet, sondern das Ausgangsproblem. Der Grund ist, dass die Lösung zusammen mit ihrer Mikrostruktur approximiert wird, nicht eine Testfunktion angepasst wird. Die Tatsache, dass das primale Problem verwendet wird, kann in Anwendungen ein Vorteil sein, etwa wenn Hysterese-Operatoren involviert sind wie in [53] oder [56].

## Ein zeitabhängiges Problem

Zeitabhängige Probleme lassen sich mit derselben Methode lösen. Wir skizzieren hier lediglich, wie sich der zweite Beweis auf ein parabolisches Problem überträgt. Um nicht nur die  $t$ -Abhängigkeit in den alten Beweis einzufügen, führen wir hier eine weitere Verallgemeinerung ein.

Wir wollen zulassen, dass die Koeffizienten nicht strikt periodisch sind. Stattdessen sollen sie zwar auf der Skala  $\varepsilon$  im Wesentlichen periodisch sein, ihr mikroskopisches Profil kann sich aber über makroskopische Distanzen verändern. Das einfachste Modell dafür ist, von einer Funktion  $a$  mit zwei Variablen auszugehen,

$$a_\varepsilon(x) = a(x, x/\varepsilon) \text{ mit } a : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow [\lambda, \Lambda] \text{ stetig in } (x, y), Y\text{-periodisch in } y. \quad (28.20)$$

Damit erhalten die Zelllösungen  $\chi_k^T(x, \cdot) \in H_{per}^1(Y)$  dann eine explizite Parameterabhängigkeit, denn die Lösung hängt von dem makroskopischen Ort  $x$  ab,

$$\nabla_y \cdot (a^T(x, y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(x, y))) = 0 \text{ in } Y. \quad (28.21)$$

Um die Rechnungen durchführen zu können benötigen wir wieder relativ starke Regularitätsannahmen an die Koeffizienten und an die Zelllösungen. Wir fordern, dass

die Koeffizienten  $a$  so glatt sind, dass  $\nabla_x a$  und die Lösungen  $\nabla_y \chi_k^T$  und  $\nabla_x \nabla_y \chi_k^T$  stetig sind auf  $\Omega \times Y$ . Zu den Zelllösungen können wir dann den makroskopisch variablen effektiven Koeffizienten definieren,

$$a_{l,k}^*(x) = \int_Y \left[ a^T(x, y)(e_k + \nabla_y \chi_k^T(x, y)) \right] \cdot e_l. \quad (28.22)$$

**Satz 28.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $T > 0$ ,  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben wie oben und  $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  die Lösungen zu

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 \text{ in } \Omega_T \quad (28.23)$$

für  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$  zu Anfangswerten  $u_0$ . Dann gilt  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  für die eindeutig Lösung  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  von

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a_*(x) \nabla u(x)) = 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega$$

zu denselben Anfangswerten. Dabei ist  $a_*(x)$  als Transponierte von  $a^*(x)$  aus (28.22) gegeben.

*Beweis. Schritt 1. A priori Schranken und Kompaktheit.* Wir halten zunächst fest, dass wir durch Testen mit der Lösung  $\varepsilon$ -unabhängige Abschätzungen für  $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  erhalten. Für eine Teilfolge finden wir dann einen schwachen Limes  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in diesem Raum. Zusätzlich ist die Folge  $u^\varepsilon$  auch beschränkt in  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  und  $u$  ist auch der schwache Limes in diesem Raum. Da in diesem Raum die Anfangswerte  $u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0 \in H^{-1}(\Omega)$  nach dem Spursatz angenommen werden, erfüllt auch  $u$  die Anfangsbedingung.

Wir benötigen eine zusätzliche zeitliche Regularität. Hierfür haben wir  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  vorausgesetzt. In diesem Fall können wir die Gleichung auch mit  $\partial_t u^\varepsilon$  testen und erhalten

$$\int_0^T \int_\Omega |\partial_t u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega a^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 \Big|_0^T = 0, \quad (28.24)$$

also insbesondere  $\varepsilon$ -unabhängige Abschätzungen für  $\partial_t u^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$ . Die Abschätzungen zeigen nun sogar die Beschränktheit von  $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_T)$ , also  $L^2$ -Abschätzungen für räumliche und zeitliche Ableitungen. Wegen Kompaktheit können wir insbesondere daher sogar die starke Konvergenz  $u^\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega_T)$  folgern.

*Schritt 2. Konstruktion oszillierender Multiplikatoren.* Wir können nun identisch zum obigen zweiten Beweis des elliptischen Satzes vorgehen. Wir betrachten wieder die Lösungen  $\chi_k^T$  des (dualen) Zellproblems und konstruieren daraus die oszillierende Testfunktion

$$\begin{aligned} \varphi_k^\varepsilon(x) &= x \cdot e_k + \varepsilon \chi_k^T(x, x/\varepsilon), \\ \psi_k^\varepsilon(x) &= \nabla \varphi_k^\varepsilon(x) = e_k + \nabla_y \chi_k^T(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \nabla_x \chi_k^T(x, x/\varepsilon) \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften wegen Lemma 29.1,

$$\operatorname{curl} \psi_k = 0, \quad \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \text{ in } L^2(\Omega) \quad (28.25)$$

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon) = \nabla_x \cdot [a^T(e_k + \nabla_y \chi_k^T)](x, x/\varepsilon) + \nabla \cdot [\varepsilon a^T(x, x/\varepsilon) \nabla_x \chi_k^T(x, x/\varepsilon)]. \quad (28.26)$$

Wir wollen einsehen, dass die Divergenz stark in  $H^{-1}(\Omega)$  konvergiert. Im ersten Summand kann die Divergenz ausgeführt werden und liefert eine stetige Funktion nach unseren Regularitätsannahmen. Auch durch Einsetzen des Argumentes  $(x, x/\varepsilon)$  bleibt die Folge beschränkt in  $L^2$  und ist daher kompakt in  $H^{-1}(\Omega)$ . Für den zweiten Summanden genügt es festzustellen, dass es sich um die Divergenz einer  $L^2$ -Nullfolge handelt, also um eine Nullfolge in  $H^{-1}(\Omega)$ .

Wegen der Definition der homogenisierten Koeffizienten in (28.22) gilt wieder

$$a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a^* e_k.$$

Dies benötigt das etwas stärkere Lemma zu oszillierenden Funktionen, Lemma 29.1. Um hier die Konvergenz zu sichern benötigt man die Stetigkeit der Funktionen in  $x$  und  $y$ . Dieser Punkt ist in der Entwicklung der Theorie schwierig und auch in Anwendungen oft ein Problem. Wir haben hierfür die Glattheitsannahme an die Koeffizienten  $a$  gestellt. Für Ergänzungen und Erweiterungen verweisen wir auf [57].

*Schritt 3. Limesbildung mit div-curl-Lemma.* Wir wählen eine Teilfolge, so dass  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Unser Ziel ist die Charakterisierung von  $u$ . Zusätzlich verwenden wir die beiden relevanten Felder, die Gradienten  $\xi^\varepsilon := \nabla u^\varepsilon$  und die Flüsse  $p^\varepsilon := a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ . Diese Felder sind in  $L^2(\Omega_T)$  beschränkt und wir wählen schwach konvergente Teilfolgen und Limiten mit

$$\begin{aligned} p^\varepsilon &:= a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ in } L^2(\Omega_T), \\ \xi^\varepsilon &:= \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ in } L^2(\Omega_T). \end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, dass wir in der Erhaltungsgleichung sofort zum Limes übergehen können,

$$\partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot p^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_T \quad \Rightarrow \quad \partial_t u - \nabla \cdot p = 0 \text{ in } \Omega_T.$$

Die Randbedingungen sind ebenfalls erfüllt.

Der Beweis ist abgeschlossen, sobald wir aus der Relation  $p^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon$  folgern können, dass

$$p = a_* \xi. \tag{28.27}$$

Dies geschieht wieder mit der kompensierten Kompaktheit durch die Wahl eines geeigneten oszillierenden Multiplikators. Wir verwenden die bereits vorbereitete Funktion  $\psi_k^\varepsilon$ , die wir als eine zeitunabhängige Funktion auf  $\Omega_T$  auffassen. Wir betrachten daher die Ausdrücke

$$p^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = \xi^\varepsilon \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon)$$

auf  $\Omega_T$ . Auf der rechten Seite gilt  $\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi$  und  $a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a_*^T e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega_T)$ . Gleichzeitig ist  $\text{curl } \xi^\varepsilon = 0$  und  $\nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon)$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega_T)$ . Also konvergiert die rechte Seite schwach gegen  $\xi \cdot (a_*^T e_k) = (a_* \xi) \cdot e_k$ .

Links gilt  $p^\varepsilon \rightharpoonup p$  und  $\psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega_T)$ , zudem  $\text{curl } \psi_k^\varepsilon = 0$ . Gleichzeitig ist  $\nabla \cdot p^\varepsilon = \partial_t u^\varepsilon$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega_T)$ ; an dieser Stelle verwenden wir die zusätzliche zeitliche Regularität, welche  $u^\varepsilon \rightarrow u$  stark in  $L^2(\Omega_T)$  geliefert hat. Also konvergiert die linke Seite schwach gegen  $p \cdot e_k$ . Insgesamt folgt aus dem div-curl Lemma

$$p \cdot e_k = (a_* \xi) \cdot e_k.$$

und damit (28.27).

Bezüglich der Anwendung des div-curl Lemmas betonen wir, dass Divergenz und Curl nur bezüglich der räumlichen Koordinaten  $x$  betrachtet werden, nicht bezüglich der zeitlichen Koordinate  $t$ . Dennoch ist das Lemma anwendbar, denn jeweils der zweite Faktor in den obigen Produkten  $p^\varepsilon \psi_k^\varepsilon$  und  $\xi^\varepsilon(a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon)$  hängt nicht von der Zeit ab (vergleiche Übung 28.4).  $\square$

## Übungen

**Übung 28.2.** *Eine schwach konvergente Folge in  $L^2$  ist eine stark konvergente Folge in  $H^{-1}$ .*

**Übung 28.3** (Eine Weyl-Zerlegung mit periodischen Funktionen). *Sei  $Y = [0, 1]^n$ . Dann lässt sich jede Funktion  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  zerlegen in einen Gradienten und einen divergenzfreien Anteil:  $u = v + w$  mit*

$$v = \nabla \phi \in L^2(Y), \quad \phi \in H_{per}^1(Y) \\ \nabla \cdot w = 0 \text{ in } \Omega.$$

*Steht eine Funktion  $u \in L^2(Y)$  senkrecht auf allen divergenzfreien Funktionen  $w$ , so lässt sie sich als Gradient einer periodischen Funktion in  $H^1(Y)$  schreiben.*

**Übung 28.4.** *Sei  $(x, t) \in Q_T \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ ,  $Q_T$  offen,  $q^\varepsilon, v^\varepsilon$  Folgen in  $L^2(Q_T, \mathbb{R}^N)$  mit*

$$q^\varepsilon \rightharpoonup q, \quad v^\varepsilon \rightharpoonup v \text{ in } L^2(Q_T).$$

*Für die räumlichen Ableitungen gelte  $\operatorname{curl} v^\varepsilon = 0$  auf  $Q_T$  und  $\nabla \cdot q^\varepsilon$  sei kompakt in  $H^{-1}(Q_T)$ . Falls eine der Folgen ( $q^\varepsilon$  oder  $v^\varepsilon$ ) von  $t$  unabhängig ist, so gilt im Distributionssinn auf  $Q_T$*

$$q^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \xrightarrow{*} q \cdot v.$$

# 29 Kapitel 29.

---

## Zweiskalenkonvergenz

Die Zweiskalenkonvergenz ist eine elegante Methode für Homogenisierungslimiten. Sie ist zwar beschränkt auf periodische Homogenisierung, in diesem Fall jedoch die stärkste Methode, die auch die kürzesten Beweise und gute Einsicht in die Limiten liefert. Entwickelt wurde die Methode von Allaire [1] undNguetseng [42]. Wir wollen betonen, dass in diesem kurzen Kapitel lediglich einer Auswahl der Ergebnisse von Allaire zusammengestellt wird; diese sind in [1] bewiesen und zugänglich vorgestellt.

### 29.1. Zweiskalenkonvergenz und Kompaktheit

#### Auf zwei Skalen oszillierende Funktionen

Wir erinnern an die Notation

$$k \in \mathbb{Z}^n, \quad x_k = \varepsilon k, \quad Y_k^\varepsilon := \varepsilon(k + Y) = x_k + (0, \varepsilon)^n \quad (29.1)$$

und wollen uns mit Mittelungsprozessen für Funktionen beschäftigen, die auf zwei Skalen variieren. Wir verwenden die Räume  $C_{per}^0(Y)$  und  $C_{per}^\infty(Y)$ , die wie der Raum  $H_{per}^1(Y)$  den Unterraum derjenigen Funktionen bezeichnet, deren  $Y$ -periodische Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$  eine Funktion derselben Klasse liefert.

**Lemma 29.1** (Eigenschaften oszillierender Funktionen II). *Für  $\varphi : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  bilden wir die oszillierende Funktion*

$$\varphi^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi^\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Für  $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}, C_{per}^0(Y))$  gilt

$$\varphi^\varepsilon = \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, y) dy. \quad (29.2)$$

**Warnung.** An dieser Stelle ist es wichtig, dass die Funktion  $\varphi$  gute Regularitätseigenschaften besitzt. Falls die Funktion zum Beispiel stetig ist in  $y$  für fast alle  $x$ , so kann die obige Aussage noch (unter Integrierbarkeitsvoraussetzungen) verifiziert werden. Fehlt jedoch eine Stetigkeitsvoraussetzung, so ist sogar schon die Messbarkeit der Funktion  $\varphi^\varepsilon$  ein Problem.



*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, dass die Folge  $\varphi^\varepsilon$  in  $L^2(\Omega)$  beschränkt ist, weil  $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, x/\varepsilon) \leq \|\varphi\|_{C^0(\bar{\Omega}, C_{per}^0(Y))}$  für alle  $x, y$ . Dann hat  $\varphi^\varepsilon$  eine  $L^2(\Omega)$ -schwach konvergente Teilfolge,  $\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \varphi_0$ . Zur Charakterisierung des Mittelwertes  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$  berechnen wir für  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi_0(x) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi^\varepsilon(x) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x, x/\varepsilon) \psi(x) dx.$$

Wir konstruieren nun zwei Hilfsfunktionen.  $\bar{\varphi}(x, y) := \varphi(x_k, y)$  für alle  $x \in Y_k^\varepsilon$  und  $y \in Y$ , und  $\bar{\psi}(x) = \psi(x_k)$  für alle  $x \in Y_k^\varepsilon$ . Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\varphi$  gilt  $\|\bar{\varphi} - \varphi\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \leq \rho(\varepsilon) \rightarrow 0$  und wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\psi$  gilt  $\|\bar{\psi} - \psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon$ . Wir können nachrechnen, indem wir in der dritten Gleichung das Integral als Summe über die Integrale über die Zellen  $Y_k^\varepsilon$  lesen (die Konstante  $C$  ändert sich von einer Zeile zur nächsten)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x, x/\varepsilon) \psi(x) dx &= \int_{\Omega} \bar{\varphi}(x, x/\varepsilon) \psi(x) dx + C\rho(\varepsilon) = \int_{\Omega} \bar{\varphi}(x, x/\varepsilon) \bar{\psi}(x) dx + C\varepsilon + C\rho(\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} \int_Y \bar{\varphi}(x, y) dy \bar{\psi}(x) dx + C\varepsilon + C\rho(\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) dy \psi(x) dx + C(\varepsilon + \rho(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt das Gewünschte.  $\square$

## Zweiskalenkonvergenz

**Definition 29.2.** Eine Folge  $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  konvergiert in zwei Skalen gegen eine Grenzfunktion  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ , falls für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_{per}^\infty(Y))$  gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx. \quad (29.3)$$

**Bemerkung 29.3.** Für Folgen  $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  gilt

1.  $u^\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  impliziert  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  in zwei Skalen für  $u_0(x, y) = u(x)$ .
2.  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  in zwei Skalen impliziert  $u^\varepsilon \rightharpoonup \int_Y u_0(\cdot, y) dy$  schwach in  $L^2(\Omega)$ .

*Beweis.* Wir haben in Lemma 29.1 bereits nachgewiesen, dass für  $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}, C_{per}^0(Y))$  gilt

$$\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, y) dy \text{ schwach in } L^2(\Omega).$$

Dies impliziert 1., denn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} u^\varepsilon \varphi^\varepsilon \rightarrow \int_{\Omega} u(x) \int_Y \varphi(x, y) dy dx.$$

Für 2. nehmen wir die Zweiskalen-Testfunktion  $\varphi(x, y) = \varphi_0(x)$  und rechnen

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi_0(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi_0(x) \int_Y u_0(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.  $\square$

## Kompaktheit von $L^2$ -Folgen

**Satz 29.4.** Zu jeder beschränkten Folge  $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  gibt es einen Limes  $u_0 \in L^2(\Omega, Y)$ , so dass eine Teilfolge von  $u^\varepsilon$  in zwei Skalen gegen  $u_0$  konvergiert.

*Beweis.* Der Kompaktheitssatz beruht auf der Beobachtung, dass die Funktionen  $u^\varepsilon$  auf einem Raum glatter zweiskalig oszillierender Testfunktionen beschränkte Funktionale definieren. Dann besitzt  $u^\varepsilon$  im entsprechenden Dualraum eine schwach-\* konvergente Teilfolge, diese erfüllt das Gewünschte.

*Schritt 1. Ein Raum von Testfunktionen.* Wir definieren uns den folgenden Banachraum.

$$B = C^0(\bar{\Omega}, C_{per}(Y)) = \left\{ \varphi = \varphi(x, y) \in C^0(\bar{\Omega} \times \bar{Y}) \mid \varphi(x, \cdot) \text{ ist } Y\text{-periodisch} \right\}. \quad (29.4)$$

$B$  ist ein separabler Banachraum, dicht in  $L^2(\Omega \times Y)$ , und für  $\varphi \in B$  gilt

$$\int_{\Omega} \left| \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \leq C \|\varphi\|_B^2, \quad (29.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y |\varphi(x, y)|^2 dy dx. \quad (29.6)$$

Dabei folgt (29.5) mit  $C = |\Omega| \cdot |Y|$ , indem man den Integranden punktweise mit der Supremumsnorm abschätzt. Die Konvergenz (29.6) folgt durch Anwendung von (29.2) auf die stetige Funktion  $\psi(x, y) := |\varphi(x, y)|^2$ .

*Schritt 2. Schwach-\* Limes.* Wir interpretieren die Funktionen  $u^\varepsilon$  als Elemente des Dualraumes von  $B$ . Die Wirkung auf eine Testfunktion wird definiert durch

$$\langle u^\varepsilon, \varphi \rangle_B := \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

Wir stellen nun die Beschränktheit der Folge  $u^\varepsilon$  in  $B'$  fest.

$$\left| \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right| \leq \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \left| \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|\varphi\|_B \quad (29.7)$$

nach (29.5). Damit existiert eine Teilfolge von  $u^\varepsilon$ , die schwach-\* in  $B'$  konvergiert. Wir finden daher  $\mu \in B'$  (dann ist  $\mu$  ein Maß auf  $\bar{\Omega} \times \bar{Y}$ , was wir jedoch nicht verwenden werden) mit

$$\langle u^\varepsilon, \varphi \rangle_B = \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \rightarrow \mu(\varphi) \quad \forall \varphi \in B$$

entlang der Teilfolge. Sobald wir  $\mu$  durch eine  $L^2$ -Funktion  $u_0$  als Integral dargestellt haben, ist der Beweis abgeschlossen.

Wir betrachten dafür nochmals die Abschätzung (29.7) der Folge in  $B'$ . Tatsächlich hat das Element  $\mu \in B'$  wegen (29.6) die Eigenschaft

$$|\mu(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad \forall \varphi \in B,$$

also für alle  $\varphi$  in einer dichten Teilmenge. Dann kann  $\mu$  stetig zu einem Funktional auf  $L^2(\Omega \times Y)$  fortgesetzt werden und kann daher dargestellt werden durch ein Element  $u_0$  dieses Hilbertraumes. Damit ist der Satz gezeigt.  $\square$

## Folgen von Gradienten

Wir werden im Folgenden den Raum  $L^2(\Omega, H_{per}^1(Y))$  und ähnliche weitere Bochner-Funktionsräume verwenden. Deren Definition ist analog zu dem in Abschnitt 10.1 konstruierten Raum  $L^2((0, T), X)$ . Allerdings können in diesem Abschnitt immer auch die einfacheren äquivalenten Definitionen wie in (10.3)–(10.6) verwendet werden.

**Satz 29.5.** *Sei  $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$  beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge und Limiten  $u \in H^1(\Omega)$  und  $u_1 \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y))$ , so dass*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightarrow u \text{ schwach in } H^1 \text{ und in zwei Skalen,} \\ \nabla_x u^\varepsilon(x) &\rightarrow \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) \text{ in zwei Skalen.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Funktionen  $u^\varepsilon$  und  $\nabla u^\varepsilon$  sind beschränkt in  $L^2(\Omega)$ . Wegen der üblichen Kompaktheit  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  finden wir  $u^\varepsilon \rightarrow u$  stark in  $L^2(\Omega)$ , und daher, wegen Bemerkung 29.3, auch im Sinn der Zweiskalenkonvergenz. Satz 29.4 liefert eine Teilfolge und eine Grenzfunktionen  $v_0(x, y)$ , so dass  $\nabla u^\varepsilon \rightarrow v_0 \in L^2(\Omega \times Y, \mathbb{R}^n)$  in zwei Skalen (komponentenweise). Es bleibt, die Struktur der Grenzfunktion

$$v_0(x, y) = \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$$

für ein  $u_1$  nachzuweisen.

Wir wählen als Testfunktion  $\varphi(x, y) = \rho(x)\psi(y)$  mit  $\rho \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$  und  $\psi \in C_{per}^1(Y, \mathbb{R}^n)$  divergenzfrei,  $\nabla_y \cdot \psi = 0$  auf  $Y$ . Wir erhalten aus der Definition der Zweiskalenkonvergenz und Lemma 28.1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \cdot \rho(x)\psi(y) \, dy \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \rho(x)\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \nabla \rho(x) \cdot \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = - \int_{\Omega} u(x) \nabla \rho(x) \cdot \left( \int_Y \psi(y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \rho(x) \left( \int_Y \psi(y) \, dy \right) \, dx. \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung als

$$\int_{\Omega} \int_Y [v_0(x, y) - \nabla u(x)] \psi(y) \rho(x) \, dy \, dx = 0.$$

Da  $\rho$  beliebig war, gilt die Gleichung lokal und wir finden für fast alle  $x$

$$\int_Y [v_0(x, y) - \nabla u(x)] \psi(y) \, dy = 0.$$

Daraus folgt, dass die  $L^2(Y)$ -Funktion  $[v_0(x, \cdot) - \nabla u(x)]$  senkrecht steht auf allen divergenzfreien Funktionen. Also ist die Funktion der Gradient einer  $H_{per}^1(Y)$ -Funktion  $u_1$  wie behauptet (vergleiche die Weyl-Zerlegungen aus den Übungen 6.9 und 28.3). Die  $H^1$ -Norm von  $u_1(x, \cdot)$  ist abgeschätzt durch die  $L^2$ -Norm von  $v_0(x, \cdot)$  und die  $\mathbb{R}^n$ -Norm von  $\nabla u(x)$ . Daher ist die Funktion  $u_1$  tatsächlich in  $L^2(\Omega, H^1(Y))$  wie behauptet.  $\square$

## 29.2. Anwendung auf das elliptische Modellproblem

4. *Beweis von Satz 28.2.* Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass die periodische Funktion  $a : \bar{Y} \rightarrow [\lambda, \Lambda]$  unendlich oft differenzierbar ist, im allgemeinen Fall muss ein Approximationsargument eingefügt werden.

Wir betrachten wieder die Lösungen des  $\varepsilon$ -Problems  $u^\varepsilon$  und nutzen die Beschränktheit von  $u^\varepsilon$  in  $H^1(\Omega)$ . Sie erlaubt es, Satz 29.5 anzuwenden. Wir finden eine Teilfolge und Grenzfunktionen mit  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H^1(\Omega)$  und

$$\nabla_x u^\varepsilon(x) \rightarrow \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) \text{ in zwei Skalen.}$$

für  $u_1 \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y))$ .

Wir wählen nun oszillierende Funktionen in einer speziellen Form. Zu beliebigen  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$  und  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega, C_{per}^\infty(Y))$  bilden wir  $\varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x, y)$ . Nach Einsetzen der schnellen Variablen ist damit unsere oszillierende Testfunktion  $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x, x/\varepsilon)$ . Wir stellen fest, dass  $\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi_0$  stark in  $L^2(\Omega)$ . Durch Ausnutzen der elliptischen Gleichung und der Definition der Zweiskalenkonvergenz für  $\varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x, y)$  können wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)\varphi_0(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x)\varphi^\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi^\varepsilon(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(x) \cdot a^T(x/\varepsilon) [\nabla_x \varphi_0(x) + \nabla_y \varphi_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \nabla_x \varphi_1(x, x/\varepsilon)] dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot a^T(y) [\nabla_x \varphi_0(x) + \nabla_y \varphi_1(x, y)] dy dx. \end{aligned} \quad (29.8)$$

Aus dieser Relation können alle Gleichungen für  $u_1$  und  $u$  abgelesen werden.

Zunächst vereinfachen wir durch die Wahl von  $\varphi_0 = 0$  und  $\varphi_1(x, y) = \rho(x)\psi(y)$  mit glatten Testfunktionen. Wir finden

$$0 = \int_{\Omega} \int_Y (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \rho(x) a^T(y) \nabla_y \psi(y) dy dx.$$

Da  $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$  beliebig war, gilt für fast alle  $x \in \Omega$

$$0 = \int_Y (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) a^T(y) \nabla_y \psi(y) dy.$$

Da  $\psi$  beliebig war, ist  $u_1(x, \cdot) \in H_{per}^1(Y)$  die Lösung des Zellproblems (28.9) mit  $\xi = \nabla u$ . Daher, mit den Elementarlösungen  $\chi_k \in H_{per}^1(Y)$  aus (28.10) wegen Eindeutigkeit (bis auf eine additive Konstante)

$$u_1(x, y) = \sum_k \partial_{x_k} u(x) \chi_k(y). \quad (29.9)$$

Nun vereinfachen wir in der Rechnung (29.8) durch die Wahl von  $\varphi_1 = 0$  und setzen das Ergebnis (29.9) ein.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)\varphi_0(x) dx &= \int_{\Omega} \int_Y (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot a^T(y) \nabla_x \varphi_0(x) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y \sum_k \partial_{x_k} u(x) a(y) (e_k + \nabla_y \chi_k(y)) \nabla_x \varphi_0(x) dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \sum_k \partial_{x_k} u(x) (a_* e_k) \cdot \nabla_x \varphi_0(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} a_* \nabla u(x) \cdot \nabla_x \varphi_0(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Grenzgleichung hergeleitet. □

## Übungen

**Übung 29.1** (Glatte Zweiskalenfunktionen). Sei  $\varphi_0 \in C^0(\bar{\Omega} \times \bar{Y})$  periodisch in  $y$  und  $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi_0(x, x/\varepsilon)$ . Zeigen Sie die Konvergenz  $\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi_0$  in zwei Skalen.

**Übung 29.2** (Erweiterter Raum von Testfunktionen). Es gelte  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  in zwei Skalen und  $\varphi \in L^2(\Omega, C_{per}^0(Y))$ . Zeigen Sie, dass die Konvergenz (29.3) weiterhin gilt. Hinweis: Vergleichen Sie, wenn notwendig, mit [1].

Warnung: Der Raum  $C^0(\Omega, L^2(Y))$  eignet sich nicht als Raum von Testfunktionen.

# 30 Kapitel 30.

---

## Stochastische Homogenisierung

Wir folgen in dieser Darstellung in weiten Teilen [33] und [38]. Wir versuchen hier, eine möglichst klare Trennung zu ziehen zwischen der Analyse eines stochastischen Zellproblems und der Homogenisierung eines Randwertproblems. Der schwierigere Teil ist die Analyse des Zellproblems, die Homogenisierung kann dann wie in unserem ersten Kapitel zur Homogenisierung durchgeführt werden.

### 30.1. Aufgabenstellung und Homogenisierungslimes

Wir wollen eine zufällige Verteilung des Koeffizienten  $a_\varepsilon$  zulassen. Dafür benötigen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , wobei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra von messbaren Teilmengen von  $\Omega_{\mathcal{P}}$  ist und  $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, also ein Maß auf  $\Omega_{\mathcal{P}}$  mit  $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  und  $\mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{P}}) = 1$ .

Wir wollen hier wieder den einfachsten nichttrivialen Fall beschreiben. Dazu betrachten wir nicht einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega_{\mathcal{P}}$ , sondern nehmen an, dass die Elemente von  $\Omega_{\mathcal{P}}$  Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  sind. Wir wollen sogar fordern, dass für Schranken  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  die Zufallsvariable eine meßbare Abbildung in das vorgegebene Intervall ist, also

$$\Omega_{\mathcal{P}} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n, [\lambda, \Lambda]). \quad (30.1)$$

Mit einer solchen Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraumes kann man die Elemente  $\tilde{a} \equiv \omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  mit ihrer Skalierung  $a_\varepsilon(x) = \tilde{a}(x/\varepsilon)$  direkt als Koeffizienten in einer Gleichung auffassen.

**Beispiel 30.1** (Zufälliges Schachbrett). *Wir können folgenden Prozess betrachten: Wir wählen zunächst einen Fußpunkt  $x \in Y = (0, 1)^n$  zufällig und gleichverteilt. Zu  $x$  zerlegen wir  $\mathbb{R}^n$  schachbrettartig in die Zellen*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Y_k \cup \mathcal{N} \text{ für } Y_k = k + x + Y,$$

*und die Nullmenge  $\mathcal{N}$  der Würfel Flächen. Wir fordern, dass die Koeffizienten zellweise konstant sind, also*

$$\Omega_{\mathcal{P}} = \{a : \mathbb{R}^n \rightarrow [\lambda, \Lambda] : a \text{ konstant auf } Y_k \forall k \in \mathbb{Z}^n \text{ für ein } x \in Y\}.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathcal{P}$  kann zum Beispiel dadurch festgelegt werden, dass wir fordern, dass alle Werte  $a|_{Y_k}$  gleichverteilt zufällig und unabhängig voneinander in  $[\lambda, \Lambda]$  gewählt werden.

Das Beispiel hat einen zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum. Dies folgt aus der Tatsache, dass zu einer Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen auch das unendliche Produkt ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, siehe z.B. [17], 8.2.2.

**Bemerkung.** In der Literatur wird üblicherweise eine (zumindest formal) allgemeinere Konstruktion durchgeführt. Man betrachtet einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega_{\mathcal{P}}$ , der die zusätzliche Eigenschaft hat, dass eine mit  $x \in \mathbb{R}^n$  indizierte Familie von Translationen auf  $\Omega_{\mathcal{P}}$  wirkt,  $T_x : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}$ ,  $T_x : \omega \mapsto T_x \omega$ . Für eine meßbare Funktion  $f : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow [\lambda, \Lambda]$  wird dann die Leitfähigkeit

$$\tilde{a}(x) := f(T_x \omega), \text{ und dazu } a_\varepsilon(x) := \tilde{a}(x/\varepsilon) = f(T_{x/\varepsilon} \omega)$$

betrachtet. Unsere vereinfachende Annahme (30.1) erspart uns die Angabe der strukturellen Eigenschaften der Familie  $(T_x)_x$ . Zudem haben wir den Vorteil, dass wir den Koeffizientenverteilungen direkt Wahrscheinlichkeiten zuordnen können.

## Stochastisches Homogenisierungsproblem.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in L^2(\Omega)$  eine rechte Seite. Für jedes Elementarereignis  $\tilde{a} = \omega$  bilden wir  $a_\varepsilon(x) = \tilde{a}(x/\varepsilon)$  und betrachten die Lösung  $u^\varepsilon$  von

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \text{ in } \Omega, \quad (30.2)$$

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \quad (30.3)$$

Wir könnten dabei auch genauer schreiben  $u^\varepsilon(x) = u_\omega^\varepsilon(x)$ , denn die Lösung hängt auch von dem stochastischen Koeffizienten  $\tilde{a} = \omega$  ab. Die Lösung  $u^\varepsilon$  ist also eine Zufallsvariable. Wir werden allerdings zeigen: Für einen geeigneten Koeffizienten  $a_* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des homogenisierten Problems  $\nabla \cdot (a_* \nabla u) = f$  gilt

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega) \text{ fast sicher.} \quad (30.4)$$

Dabei heißt “fast sicher” nichts anderes als “für  $\mathcal{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ ”.

## Der stochastisch gemittelte Koeffizient $a_*$ .

Wie in der deterministischen Homogenisierung haben wir das folgende Bild: Wenn wir eine Funktion  $\varphi_k$  finden, deren mittlerer Gradient  $e_k$  ist, die aber mikroskopisch die Gleichung  $\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla \varphi_k) = 0$  löst, so ergibt sich die makroskopische (homogenisierte) Leitfähigkeit durch Mittelung,

$$a_\varepsilon \nabla \varphi_k \rightharpoonup a_* \cdot e_k.$$

Wir zerlegen daher unsere Betrachtungen in zwei Schritte. Ein Schritt analysiert die Funktionen  $\varphi_k$  (“Zelllösungen”). Der andere Schritt überträgt die Resultate auf Gleichungen, also mit rechter Seite und mit Randbedingungen.

Das Resultat über die Zelllösungen ist in folgendem Satz zusammengefasst. Für die Wahl von Funktionenräumen ist es vorteilhaft, nicht die Zelllösung  $\varphi_k$  selbst, sondern deren Gradienten  $\psi_k = \nabla \varphi_k$  als Hilfsfunktion zu betrachten.

**Satz 30.2.** *Der Wahrscheinlichkeitsraum sei ergodisch gemäß Definitionen 30.4 und 30.8. Dann existiert eine homogenisierte Koeffizientenmatrix  $a^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass für  $\mathcal{P}$ -fast jedes  $\omega$  folgendes gilt: Zu den Koeffizienten  $\tilde{a}(x; \omega) = \omega(x)$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^n, [\lambda, \Lambda])$  existiert ein  $\psi_k(\cdot; \omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften*

$$\nabla_y \cdot (\tilde{a}^T(y) \psi_k(y)) = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n, \quad (30.5)$$

$$\text{curl } \psi_k = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n. \quad (30.6)$$

*Der Mittelwert von  $\psi_k$  ist  $e_k$  und der Mittelwert von  $\tilde{a} \cdot \psi_k$  ist  $a^* e_k$  in folgendem Sinn: Für jede beschränkte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  gilt*

$$\psi_k(\cdot/\varepsilon; \omega) \rightharpoonup e_k \text{ in } L^2(K) \quad (30.7)$$

$$\tilde{a}^T(\cdot/\varepsilon; \omega) \psi_k(\cdot/\varepsilon; \omega) \rightharpoonup a^* \cdot e_k \text{ in } L^2(K). \quad (30.8)$$

**Bemerkung.** Wir stellen fest, dass der Beweis des Satzes eine zusätzliche Information in Hinsicht auf die Abhängigkeit  $\psi_k$  von  $\omega$  liefert: Es gilt  $(\omega \mapsto \psi_k(0; \omega)) \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ , oder, in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie,  $\mathbb{E}(|\psi_k(0)|^2) < \infty$ .

## Homogenisierungslimes

Wir gehen genau analog zu Abschnitt 28.3 vor. Wir betrachten hier zur Vereinfachung der Notation nur skalare Koeffizienten, so dass das duale Problem mit dem Ausgangsproblem übereinstimmt.

**Satz 30.3.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $a_\varepsilon(x) = \tilde{a}(x/\varepsilon)$  stochastische Koeffizienten in einem ergodischen Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega_{\mathcal{P}}$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  die Lösungen zu*

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \text{ in } \Omega. \quad (30.9)$$

*Weiterhin sei  $u \in H_0^1(\Omega)$  die eindeutige Lösung von*

$$\nabla \cdot (a_* \nabla u(x)) = f \text{ in } \Omega,$$

*mit  $a_* = (a^*)^T$  und  $a^*$  aus Satz 30.2. Dann gilt*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega) \text{ für } \mathcal{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega_{\mathcal{P}}.$$

*Beweis.* Für fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  und  $\tilde{a}(y; \omega) = \omega(y)$  haben wir nach Satz 30.2 die speziellen Lösungen  $\psi_k$  zur Verfügung. Durch Skalierung erhalten wir die Koeffizienten  $a_\varepsilon(x) = \tilde{a}(x/\varepsilon)$  und  $\psi_k^\varepsilon(x) = \psi_k(x/\varepsilon)$ , die Abhängigkeit von  $\omega$  wird ab jetzt unterdrückt. Diese Funktionen erfüllen auf  $\mathbb{R}^n$

$$\nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon) = 0, \quad \text{curl } \psi_k^\varepsilon = 0, \quad (30.10)$$

$$\psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k, \quad a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a^* \cdot e_k, \quad (30.11)$$

die schwachen Konvergenzen gelten in  $L^2$  auf beliebigen kompakten Teilmengen.



*Schritt 1: Grenzfunktionen und Erhaltungsgleichung.* Wir betrachten für eine geeignete Teilfolge den Limes  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$ . Der Limes erfüllt die Randbedingung nach dem Spursatz. Zudem betrachten wir Limiten der Hilfsfunktionen,

$$\begin{aligned} p^\varepsilon &:= a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ in } L^2(\Omega), \\ \xi^\varepsilon &:= \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

In der Erhaltungsgleichung können wir zum Limes übergehen,

$$\nabla \cdot p^\varepsilon = f \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot p = f \text{ in } \Omega.$$

*Schritt 2: Konstitutive Gleichung.* Es bleibt, aus der Relation  $p^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon$  zu folgern, dass

$$p = a_* \xi. \quad (30.12)$$

Dies geschieht mit der speziellen Funktion  $\psi_k^\varepsilon$ , indem wir das Produkt schreiben als

$$p^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = a_\varepsilon \xi^\varepsilon \cdot \psi_k^\varepsilon = \xi^\varepsilon \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon). \quad (30.13)$$

Wir gehen zum Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  über, wobei wir auf beiden Seiten von (30.13) kompensierte Kompaktheit verwenden.

Für die linke Seite von (30.13) gilt  $p^\varepsilon \rightharpoonup p$  und  $\psi_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega)$ . Gleichzeitig ist  $\nabla \cdot p^\varepsilon = f$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega)$  und  $\text{curl } \psi_k^\varepsilon = 0$ . Also konvergiert die linke Seite im Distributionssinn gegen  $p \cdot e_k$ .

Auf der rechten Seite von (30.13) gilt  $\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi$  und  $a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon \rightharpoonup a^* e_k$ , beides schwach in  $L^2(\Omega)$ . Gleichzeitig ist  $\text{curl } \xi^\varepsilon = 0$  und  $\nabla \cdot (a_\varepsilon^T \psi_k^\varepsilon) = 0$  stark konvergent in  $H^{-1}(\Omega)$ . Also konvergiert die rechte Seite im Distributionssinn gegen  $\xi \cdot (a^* e_k)$ . Da  $k \leq n$  beliebig war, erhalten wir (30.12).  $\square$

## 30.2. Translationen, Mittelung und Ergodizität

Wir haben gesehen, dass aus Satz 30.2 in altbekannter Weise der Homogenisierungslimes geschlossen werden kann. Im Folgenden bleibt daher Satz 30.2 über Zelllösungen zu beweisen. Zentral wird dabei sein, dass wir die Betrachtungsweise verändern. Der Satz ist punktweise formuliert, beim Lesen von Satz 30.2 erwartet man, dass man  $\omega$  festhalten muss, und dazu  $\psi_k(\cdot; \omega)$  konstruiert. Es ist aber günstiger, eine Funktion  $\omega \mapsto \mathbb{R}^n$  zu konstruieren, also gewissermaßen das Problem für alle  $\omega$  gleichzeitig zu lösen.

Als Vorbereitung dazu müssen wir uns in diesem Abschnitt mit Translationen und Mittelungsprozessen beschäftigen. Nach dieser Vorbereitung werden wir in Abschnitt 30.3 das Zellproblem lösen.

### Translationen und Realisierungen

Für  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  haben wir in natürlicher Weise eine Translation gegeben: Zu einer Funktion  $\omega$  können wir auch die Verschiebung  $T_x \omega$  betrachten, definiert durch  $T_x \omega(y) = \omega(x + y)$ . Wir wollen immer davon ausgehen, dass mit  $\omega$  auch  $T_x \omega$  im Wahrscheinlichkeitsraum liegt, zudem davon, dass eine verschobene Version  $T_x \omega$  genauso wahrscheinlich ist, wie  $\omega$  selbst. Diese Vorstellung wollen wir im Folgenden präzisieren.

Unser Interesse gilt zufälligen Feldern auf  $\mathbb{R}^n$ , also Funktionen  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\tilde{f} = \tilde{f}(x; \omega)$ . Allerdings haben die Funktionen, die für uns interessant sind, eine spezielle Eigenschaft: Sie respektieren Translationen von  $\omega$ , in dem Sinne, dass ein um  $y \in \mathbb{R}^n$  verschobenes  $\omega$ -Feld auch das Feld  $\tilde{f}$  lediglich um  $y$  verschoben ist. In Formeln erwarten wir

$$\tilde{f}(x + y; \omega) = \tilde{f}(x; T_y \omega). \quad (30.14)$$

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennen wir im Folgenden *homogen*.

Für homogene Funktionen reduziert sich die Anzahl der zu betrachtenden Variablen. Gegeben eine Funktion mit nur der Variablen  $\omega$ , also  $f : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , können wir die Realisierung bilden,

$$\tilde{f}(x; \omega) := f(T_x \omega). \quad (30.15)$$

Tatsächlich erfüllt für ein beliebiges  $f$  die zugehörige Realisierung  $\tilde{f}(x + y; \omega) = f(T_{x+y} \omega) = f(T_x T_y \omega) = \tilde{f}(x; T_y \omega)$ . Umgekehrt können wir zu  $\tilde{f}$  mit Eigenschaft (30.14)  $f$  als  $f(\omega) := \tilde{f}(0, \omega)$  definieren. Diese Wahl ist konsistent mit (30.15), denn

$$f(T_x \omega) = \tilde{f}(0; T_x \omega) \stackrel{(30.14)}{=} \tilde{f}(x; \omega)$$

für alle  $x, \omega$ . Wir vereinfachen daher im Folgenden die Klasse von Funktionen und betrachten nur  $f : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , genauer  $f \in L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^m)$  für  $m = 1$  oder  $m = n$  und  $\alpha = 1$  oder  $\alpha = 2$ .

In diesem Rahmen wird die Leitfähigkeit aufgefasst als Abbildung  $a : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow [\lambda, \Lambda]$ ,  $a(\omega) := \omega(0)$ . Wir finden dann wieder in der Realisierung

$$\tilde{a}(x; \omega) = a(T_x \omega) = (T_x \omega)(0) = \omega(x).$$

Wir benötigen folgende Eigenschaften der Translationen.

**Definition 30.4** (Dynamisches System im Wahrscheinlichkeitsraum). *Wir nehmen an, dass die Translationen  $T_x : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  folgenden Eigenschaften haben.*

1. *Gruppeneigenschaft:  $T_0 = \text{id}_{\Omega_{\mathcal{P}}}$  und  $T_{x+y} = T_x \circ T_y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .*
2. *Maßinvarianz: Für jede messbare Teilmenge  $\Sigma \subset \Omega_{\mathcal{P}}$  und jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $T_x \Sigma$  messbar und es gilt  $\mathcal{P}(T_x \Sigma) = \mathcal{P}(\Sigma)$ .*
3. *Messbarkeit: Für jede messbare Abbildung  $f : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Realisierung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.*

Die allgemeine Formulierung der Eigenschaften ist sinnvoll, wenn man eine abstrakte Gruppe von Translationen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum gegeben hat. Für uns ist die Gruppeneigenschaft immer erfüllt, denn die  $T_x$  sind gerade die Translationen im  $\mathbb{R}^n$ . Die anderen Bedingungen sind jedoch dann Bedingungen an den Wahrscheinlichkeitsraum, zum Beispiel fordert die zweite Eigenschaft, dass alle Translate von  $\omega$  gleich wahrscheinlich sind.

**Lemma 30.5** (Translationen und Realisierungen). *Seien  $f, f_k \in L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $\tilde{f}(x; \omega) = f(T_x \omega)$  und  $\tilde{f}_k(x; \omega) = f_k(T_x \omega)$  Realisierungen. Dann gilt*

1.  $\tilde{f}(\cdot; \omega) \in L_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}^n)$  für fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ .

2.  $f_k \rightarrow f$  in  $L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}})$  impliziert, dass für eine Teilfolge gilt:  $\tilde{f}_k(\cdot; \omega) \rightarrow \tilde{f}(\cdot; \omega)$  in  $L^\alpha_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  für fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ .
3. Sei  $\Omega_0 \subset \Omega_{\mathcal{P}}$  mit  $|\Omega_0| = 1$ . Dann existiert eine Menge  $\Omega_1 \subset \Omega_0$  mit  $|\Omega_1| = 1$ , so dass

$$T_x \omega \in \Omega_0 \quad \forall \omega \in \Omega_1, \text{ fast alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (30.16)$$

*Beweis.* Punkt 1 folgt aus Punkt 3 der Definition 30.4 und Fubini: Die Messbarkeit von  $\tilde{f}$  auf  $\mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathcal{P}}$  wurde dort explizit verlangt. Das Theorem von Fubini impliziert, dass fast alle Schnitte  $\tilde{f}(\cdot; \omega)$  meßbar auf  $\mathbb{R}^n$  sind. Die lokale Integrierbarkeit folgt mit Fubini aus Punkt 2 der Definition 30.4, welcher erlaubt, Integrale über  $\tilde{f}(x; \omega) = f(T_x \omega)$  durch Integrale über  $f(\omega)$  zu ersetzen.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \left( \int_{B_R} |\tilde{f}(x; \omega)|^\alpha dx \right) d\mathcal{P}(\omega) &= \int_{B_R} \left( \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |\tilde{f}(x; \omega)|^\alpha d\mathcal{P}(\omega) \right) dx \\ &= \int_{B_R} \left( \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |f(\omega)|^\alpha d\mathcal{P}(\omega) \right) dx < \infty. \end{aligned}$$

Insbesondere ist für fast alle  $\omega$  der Integrand der linken Seite endlich.

Die zweite Behauptung folgt ganz ähnlich aus Fubini und der Maßerhaltung.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \left( \int_{B_R} |(\tilde{f}_k(x; \omega) - \tilde{f}(x; \omega))|^\alpha dx \right) d\mathcal{P}(\omega) \\ &= \int_{B_R} \left( \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |(\tilde{f}_k(x; \omega) - \tilde{f}(x; \omega))|^\alpha d\mathcal{P}(\omega) \right) dx \\ &= \int_{B_R} \left( \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |(f_k - f)(\omega)|^\alpha d\mathcal{P}(\omega) \right) dx = |B_R| \|f_k - f\|_{L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}})}^\alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für den Nachweis der dritten Behauptung benutzen wir die charakteristische Funktion  $f_0 : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  der Menge  $\Omega_0$ , insbesondere ist  $f_0 = 1$  fast überall. Da  $\tilde{f}_0$  meßbar auf  $\mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathcal{P}}$  ist, können wir wieder wie oben rechnen

$$\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \int_{B_R} |\tilde{f}_0(x; \omega)| dx d\mathcal{P}(\omega) = \int_{B_R} \left( \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |f_0(\omega)| d\mathcal{P}(\omega) \right) dx = |B_R|.$$

Das Integral stimmt mit dem Integral der konstanten 1-Funktion überein, daher muss  $\tilde{f}_0 = 1$  fast überall auf  $B_R \times \Omega_{\mathcal{P}}$  gelten. Durch Ausschöpfung von  $\mathbb{R}^n$  durch  $R \rightarrow \infty$  folgt auch  $\tilde{f}_0 = 1$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathcal{P}}$ . Fubini liefert die Existenz von  $\Omega_1 \subset \Omega_{\mathcal{P}}$  mit vollem Maß, so dass für alle  $\omega \in \Omega_1$  und fast alle  $x$  gilt  $\tilde{f}_0(\omega, x) = 1$ . Dies liefert gerade  $T_x \omega \in \Omega_0$  und damit die Behauptung.  $\square$

## Mittelungsprozesse

**Definition 30.6.** Für eine Funktion  $f \in L^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^m)$  können wir verschiedene Mittelwertbegriffe betrachten.

$$\text{Erwartungswert: } \mathbb{E}(f) := \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} f(\omega) d\mathcal{P}(\omega), \quad (30.17)$$

$$\text{Räumliches } K\text{-Mittel: } \mathbb{M}_K(f)(\omega) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \tilde{f}(x; \omega) dx \quad (30.18)$$

$$\text{Räumliches Mittel: } \mathbb{M}(f)(\omega) \quad (30.19)$$

wobei wir  $\tilde{f}(x; \omega) = f(T_x \omega)$  verwendet haben. In (30.18) ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige messbare Menge mit  $|K| < \infty$ , und  $K_R := R \cdot K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid xR^{-1} \in K\}$ . Wir bemerken dazu, dass das räumliche  $K$ -Mittel nicht notwendigerweise existieren muss. Das räumliche Mittel  $\mathbb{M}(f)(\omega)$  aus (30.19) wird definiert als deren gemeinsamer Wert, falls die räumlichen  $K$ -Mittel für alle  $K$  existieren und unabhängig sind von  $K$ .

**Lemma 30.7.** Sei  $f \in L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^m)$  und  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  so, dass  $\mathbb{M}(f)(\omega)$  existiert. Für  $K \subset \mathbb{R}^n$  sei die Funktion  $x \mapsto \tilde{f}(x/\varepsilon, \omega)$  (eingeschränkt auf  $K$ ) beschränkt in  $L^\alpha(K)$ . Dann gilt

$$\tilde{f}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right) \rightarrow \mathbb{M}(f)(\omega) \text{ in } L^\alpha(K) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.20)$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst nur charakteristische Funktionen als Testfunktion. Sei dafür  $K_0 \subset K$  messbar und beschränkt und  $\varphi(x) = 1$  für  $x \in K_0$  und  $\varphi(x) = 0$  für  $x \notin K_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \varphi(x) dx &= \int_{K_0} \tilde{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) dx = \varepsilon^n \int_{K_0/\varepsilon} \tilde{f}(y, \omega) dy \\ &= |K_0| \int_{K_0/\varepsilon} \tilde{f}(y, \omega) dy \rightarrow |K_0| \mathbb{M}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{M}(f)(\omega) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Da die charakteristischen Funktionen dicht liegen im Dualraum  $L^{\alpha'}(K)$ , folgt die Aussage. Wir betonen, dass  $\alpha = 1$  und  $\alpha' = \infty$  hier zugelassen sind, denn in diesem Fall sind die Funktionen  $\tilde{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$  ebenfalls gleichmäßig beschränkt und die charakteristischen Funktionen  $\varphi$  sind dicht in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

## Ergodizität

**Definition 30.8** (Ergodizität). Eine Funktion  $f : \Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt invariant, falls

$$f(T_x \omega) = f(\omega) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und fast alle } \omega \in \Omega_{\mathcal{P}}.$$

Das System  $T_x$  heißt ergodisch, falls jede invariante Funktion konstant ist.

Wir werden hier nicht in die Ergodentheorie einsteigen. Wir wollen lediglich folgendes Bild erwähnen: Eine invariante Funktion kann einem zufällig erzeugten Muster  $\omega$  eine Zahl  $\lambda$  so zuordnen, die den Typ des Musters beschreibt. Dabei muss gelten, dass eine Verschiebung von  $\omega$  wieder von demselben Typ  $\lambda$  sein muss. Ein solches (nichttriviales)  $f$  gibt es zum Beispiel, wenn wir das zufällige Muster so bestimmen, dass wir erst würfeln, um dann je nach Ergebnis einen anderen Algorithmus verwenden, um das unendliche Muster zu erstellen. Dann kann  $f$  dem Muster den Münzwurf ansehen.

**Satz 30.9** (Birkhoff Ergodentheorem). Sei  $f \in L^1(\Omega_{\mathcal{P}})$ . Dann existiert  $\mathbb{M}(f)(\omega)$  für fast alle  $\omega$ , ist invariant, d.h.  $\mathbb{M}(f)(T_x\omega) = \mathbb{M}(f)(\omega)$  für alle  $x$ , und es gilt

$$\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \mathbb{M}(f)(\omega) d\mathcal{P}(\omega) = \mathbb{E}(f). \quad (30.21)$$

Falls das System  $T_x$  ergodisch ist, so folgt aus der Invarianz von  $\mathbb{M}(f)$ , dass der Wert unabhängig ist von  $\omega$ ,

$$\mathbb{M}(f)(\omega) = \mathbb{E}(f) \text{ für } \mathcal{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega_{\mathcal{P}}. \quad (30.22)$$

*Beweis.* Wir zitieren hier den Satz nach [33], wo wiederum auf Dunford und Schwartz verwiesen wird. Wir weisen darauf hin, dass Theorem VIII, 7.17 aus [18] die Aussage für Würfel  $K$  in der Mittelwertbildung enthält, allgemeinere Gebiete sind in Theorem 7.10 erlaubt, dort ist allerdings  $f \in L^p(\Omega_{\mathcal{P}})$  mit  $p > 1$  vorausgesetzt. Theorem VIII, 7.17 enthält nicht explizit den zweiten Teil der Aussage.

Für eine knappe und zugängliche Einführung in die Ergodentheorie verweisen wir auf die Bücher von Klenke [37] und Dudley [17]. In beiden Büchern wird der Ergodensatz allerdings nur für diskrete, einparametrische Gruppenoperationen nachgewiesen.  $\square$

Für das weitere Verständnis ist es kein Problem, den zweiten Teil des Satzes als unsere Definition für Ergodizität zu betrachten, also: Für jede integrierbare Funktion  $f$  liefert das räumliche Mittel fast sicher gerade den Erwartungswert. Alles, was wir im Folgenden verwenden, wird die folgende Konsequenz aus (30.22) sein.

**Corollar 30.10.** Sei  $f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(f) \in \mathbb{R}$  und  $T_x$  ergodisch,  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann gilt für fast jedes  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$

$$\tilde{f}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right) \rightarrow \mathbb{E}(f) \text{ in } L^2(K) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.23)$$

*Beweis.* Wir stellen zunächst die  $L^2(K)$ -Beschränktheit fest. Tatsächlich gilt mit der Funktion  $g(\omega) := |f(\omega)|^2$ ,  $g \in L^1(\Omega_{\mathcal{P}})$ ,

$$\int_K |\tilde{f}(x/\varepsilon; \omega)|^2 dx = \int_K \tilde{g}(x/\varepsilon; \omega) dx = |K| \int_{K/\varepsilon} \tilde{g}(y, \omega) dy \rightarrow |K| \mathbb{E}(g).$$

Die Beschränktheit und der Ergodensatz 30.9 erlaubt die Anwendung von Lemma 30.7.  $\square$

### 30.3. Analyse des stochastischen Zellproblems

#### Konstruktion der Zelllösung

Unser Ziel hier ist die Konstruktion der Funktionen  $\psi_k(x; \omega)$  aus Satz 30.2. Wir wollen diese Funktionen als Realisierungen von Funktionen  $\Omega_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  konstruieren. Satz 30.2 folgt aus dem folgenden stärkeren Satz, den wir hier beweisen werden.

**Satz 30.11.** Sei  $k \leq n$  ein fester Index. Es existiert  $v \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^n)$  mit  $\mathbb{E}(v) = 0$ , so dass für fast jedes  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  die Realisierung  $\tilde{v}(x; \omega) = v(T_x\omega)$  von  $v$  curlfrei ist und die Realisierung  $\tilde{a}^T(x; \omega)(e_k + \tilde{v})(x; \omega) = \omega(x)(e_k + v)(T_x\omega)$  divergenzfrei.

*Beweis von Satz 30.2.* Zu festem  $k$  definieren wir die Zelllösung als Realisierung von  $e_k + v$ , also

$$\psi_k(\cdot; \omega) := e_k + \tilde{v}(\cdot; \omega).$$

Nach Aussage des Satzes 30.11 ist dann für fast jedes  $\omega$  die Funktion  $\psi_k$  curlfrei und die Funktion  $\tilde{a}^T \psi_k$  divergenzfrei.

Ist der Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega_{\mathcal{P}}$  ergodisch, so gilt wegen  $\mathbb{E}(v) = 0$  für fast alle  $\omega$ , dass  $\mathbb{M}(e_k + v)(\omega) = e_k$ . Dies impliziert die schwache Konvergenz der skalierten Realisierungen  $\psi_k$  gegen  $e_k$ .

Die  $k$ -te Spalte der Matrix  $a^*$  definieren wir als  $a_{\cdot, k}^* = \mathbb{E}(a^T(e_k + v))$ , so dass  $\mathbb{M}(a^T(e_k + v))(\omega) = a_{\cdot, k}^*$ . Wiederum folgt die schwache Konvergenz der skalierten Realisierungen aus der Ergodizität.  $\square$

Wir definieren die stochastischen Räume der Gradienten (besitzt ein Potential, Index POT) und der divergenzfreien Funktionen (solenoidal=quellenfrei, Index SOL).

**Definition 30.12.** *Potentialfelder und quellenfreie Felder auf  $\mathbb{R}^n$  sind definiert durch*

$$\begin{aligned} L_{pot}^2(\mathbb{R}^n) &= L_{pot}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^n) | \exists \phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \text{ mit } w = \nabla \phi\} \\ &= \{w \in L^2(\mathbb{R}^n) | \text{curl } w = 0\} \\ L_{sol}^2(\mathbb{R}^n) &= L_{sol}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^n) | \nabla \cdot w = 0\} \end{aligned}$$

Dazu können wir nun die stochastischen Versionen definieren,

$$\begin{aligned} L_{pot}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}) &= L_{pot}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^n) = \{v \in L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^n) | \tilde{v}(\cdot, \omega) \in L_{pot}^2(\mathbb{R}^n) \text{ für fast alle } \omega\} \\ L_{sol}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}) &= L_{sol}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^n) = \{v \in L^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^n) | \tilde{v}(\cdot, \omega) \in L_{sol}^2(\mathbb{R}^n) \text{ für fast alle } \omega\} \end{aligned}$$

Da mit der obigen Definition beide Räume die konstanten Funktionen enthalten, ist folgender Raum nützlich

$$L_{pot,0}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}) = \{v \in L_{pot}^\alpha(\Omega_{\mathcal{P}}) | \mathbb{E}v = 0\}.$$

Wir bemerken, dass die Divergenz im Distributionssinn definiert ist. Die nachfolgende Weyl-Zerlegung ist das  $L^2$ -Analogon zur Helmholtz-Zerlegung aus Satz 23.16, allerdings werden wir hier keine Randbedingungen betrachten müssen.

**Satz 30.13** (Weyl-Zerlegung). *Die Unterräume  $L_{pot}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ ,  $L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  sind abgeschlossen im Grundraum  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ . Die Räume  $L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  sind senkrecht zueinander und es gilt*

$$L^2(\Omega_{\mathcal{P}}) = L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}}) \oplus L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}}). \quad (30.24)$$

*Beweis. Abgeschlossenheit.* Die Abgeschlossenheit der Unterräume folgt aus Lemma 30.5:  $v_k \rightarrow v$  in  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  impliziert für fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ , dass auch die Realisierungen konvergieren,  $\tilde{v}_k(\cdot; \omega) \rightarrow \tilde{v}(\cdot; \omega)$  in  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann übertragen sich Eigenschaften wie Curl-Freiheit und Divergenzfreiheit auf die Realisierung der Limesfunktion, was zeigt, dass  $v$  wieder im entsprechenden Unterraum liegt.

*Orthogonalität.* Die Räume  $L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  stehen in  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  senkrecht. Dies folgt wieder über die Realisierungen: Seien  $v \in L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $w \in L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  mit Realisierungen  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$ . Für fast alle  $\omega_0$  können wir berechnen, indem wir in der dritten Gleichheit den Ergodensatz verwenden,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_{L^2(\Omega_{\mathcal{P}})} &= \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} v(\omega) \cdot w(\omega) d\mathcal{P}(\omega) = \mathbb{E}(v \cdot w) \\ &= \mathbb{M}(v \cdot w)(\omega_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \tilde{v}(x; \omega_0) \cdot \tilde{w}(x; \omega_0) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_K \tilde{v}(Rx; \omega_0) \cdot \tilde{w}(Rx; \omega_0) dx. \end{aligned}$$

Nun wenden wir das div-curl Lemma 28.3 an. Die Funktion  $\tilde{v}(R.; \omega_0)$  ist (für fast alle  $\omega_0$ ) ein Gradient, insbesondere curl-frei, und  $\tilde{w}(R.; \omega_0)$  ist quellenfrei. Beide Funktionen sind zudem in  $L^2(K)$  und daher (bis auf Wahl einer Teilfolge) schwach konvergent in  $L^2(K)$ , die Beschränktheit ersieht man, indem man obige Rechnung für  $v$  statt  $w$  und für  $w$  statt  $v$  betrachtet. Indem man die Rechnung für beliebige Teilmengen  $\tilde{K} \subset K$  und für  $w \equiv 1$  betrachtet, ergibt sich, dass der schwache Limes von  $\tilde{v}(R.; \omega_0)$  mit dem Erwartungswert übereinstimmt, also verschwindet. Nach dem div-curl Lemma 28.3 konvergiert das Integral gegen das Integral über die schwachen Limiten, dieses verschwindet allerdings.

*Summe ergibt den Gesamttraum.* Dieser Teil erfordert ein Approximationsargument welches in Lemma 30.14 weiter unten skizziert wird.  $\square$

*Beweis von Satz 30.11.* Der Beweis geschieht in zwei Schritten. Wir formulieren zunächst die Aussage mit den neuen Funktionenräumen, im zweiten Schritt wird die Existenzaussage mit dem Satz von Lax-Milgram bewiesen.

*Schritt 1: Umformulierung.* Mit den obigen Räumen schreiben wir die definierenden Gleichungen für  $v$  um. Wir wollen folgendes System lösen.

$$v_k \in X_p = L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}}), \quad a \cdot (e_k + v_k) \in X_s = L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}}). \quad (30.25)$$

Wir stellen zunächst fest, dass für eine Lösung  $v_k$  die Funktion  $\psi_k(x; \omega) = \tilde{v}(x; \omega) + e_k$  nach Definition der Räume  $L_{pot}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  automatisch (30.5)–(30.6) für fast alle  $a = \omega$  löst.

*Schritt 2: Lösung von (30.25).* Für festes  $k$  wollen wir die Existenz einer Lösung  $v_k$  von (30.25) nachweisen. Diese Gleichung wird mit Lax-Milgram gelöst. Wir betrachten im Grundraum  $X_p = L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  die Bilinearform

$$b(v, w) := \langle v, aw \rangle_{L^2(\Omega_{\mathcal{P}})} = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} v(\omega) a(\omega) w(\omega) d\mathcal{P}(\omega).$$

Diese Bilinearform ist koerziv, denn

$$b(v, v) = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} v(\omega) a(\omega) v(\omega) d\mathcal{P}(\omega) \geq \lambda \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} |v(\omega)|^2 d\mathcal{P}(\omega) = \lambda \|v\|_{L^2(\Omega_{\mathcal{P}})}^2.$$

Daher hat die Gleichung

$$v_k \in X_p = L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}}) \quad \text{mit} \quad b(v_k, w) = - \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} e_k a(\omega) w(\omega) d\mathcal{P}(\omega) \quad \forall w \in X_p$$

eine eindeutige Lösung  $v_k$ . Dieses erfüllt die erste Forderung von (30.25) nach Wahl des Grundraumes. Die Gleichung liefert, dass

$$av + ae_k \perp L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}}),$$

also, gemäß der Weyl-Zerlegung,  $av + ae_k \in L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ . Dies liefert (30.25) und damit den Satz.  $\square$

## Konstruktionsschritt der Weyl-Zerlegung

**Lemma 30.14.** *Zu jedem  $u \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  existieren  $v \in L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  und  $w \in L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ , so dass  $u = v + w$ .*

*Beweisskizze.* Der Beweis basiert auf zwei Operatoren auf  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ , die im ersten Schritt definiert werden.

*Schritt 1.* Die Operatoren  $\mathcal{J}_\delta$  und  $\partial_i^{\mathcal{P}}$ . Wir verwenden einen symmetrischen Glättungskern  $\phi_\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\phi_\delta \rightarrow \delta_0$  im Distributionssinn. Der Glättungsoperator  $\mathcal{J}_\delta$  wird dann definiert durch:

$$\text{zu } f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}) : \quad \mathcal{J}_\delta f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}), \quad \mathcal{J}_\delta f(\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(T_x \omega) \phi_\delta(x) dx. \quad (30.26)$$

Nun definieren wir den unbeschränkten Operator  $\partial_i^{\mathcal{P}}$ . Falls der Ausdruck der rechten Seite existiert, so setzen wir

$$\text{zu } f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}) : \quad \partial_i^{\mathcal{P}} f(\omega) := \partial_{x_i} \tilde{f}(0; \omega) = \partial_{x_i} f(T_x \omega)|_{x=0}. \quad (30.27)$$

Dieser Operator ist so definiert, dass eine Realisierung dieses  $\mathcal{P}$ -Gradienten tatsächlich ein  $x$ -Gradient ist,

$$\partial_i^{\mathcal{P}} f(T_y \omega) := \partial_{x_i} \tilde{f}(y; \omega).$$

Wir verwenden die nachfolgenden Eigenschaften dieser Operatoren. Dabei sind  $f$  und  $g$  beliebige Funktionen in  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ ,  $\varepsilon, \delta > 0$  beliebig,  $f_\delta = \mathcal{J}_\delta f$ ,  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  beliebig und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$  das Skalarprodukt in  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ . Die Eigenschaften sind einfache Konsequenzen aus dem Fubini Theorem.

$$\langle \mathcal{J}_\delta f, g \rangle_{\mathcal{P}} = \langle f, \mathcal{J}_\delta g \rangle_{\mathcal{P}} = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) g(T_x \omega) \phi_\delta(x) dx d\mathcal{P}(\omega) \quad (30.28)$$

$$\nabla^{\mathcal{P}} f_\delta = (\partial_1^{\mathcal{P}} f_\delta, \dots, \partial_n^{\mathcal{P}} f_\delta) \text{ existiert und ist ein Element von } L_{pot}^2(\Omega_{\mathcal{P}}) \quad (30.29)$$

$$\partial_i^{\mathcal{P}} \mathcal{J}_\varepsilon f_\delta(\omega) = \mathcal{J}_\varepsilon \partial_i^{\mathcal{P}} f_\delta(\omega) = \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(T_x T_y \omega) \phi_\delta(y) dy \Big|_{x=0} \quad (30.30)$$

*Schritt 2. Divergenzfreiheit.* Zu einer beliebigen Funktion  $u \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  können wir  $v \in L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  als die orthogonale Projektion auf diesen abgeschlossenen Unterraum definieren. Die Funktion  $w$  wird dann über  $w = u - v$  definiert und steht senkrecht auf den Gradientenfeldern.

Es bleibt zu zeigen, dass eine beliebige Funktion  $g \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$ , die orthogonal ist auf allen Gradienten, nur divergenzfreie Realisierungen hat, also

$$g \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}) \text{ mit } g \perp L_{pot,0}^2(\Omega_{\mathcal{P}}) \text{ erfüllt } g \in L_{sol}^2(\Omega_{\mathcal{P}}). \quad (30.31)$$



Wir rechnen dazu für eine beliebige skalare Funktion  $f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}})$  wie folgt. In der ersten Zeile verwenden wir  $g \perp L^2_{pot,0}(\Omega_{\mathcal{P}})$ , in den mit (E) markierten Gleichungen die Ergodizität mit beliebigem  $\omega_0 \in \Omega_{\mathcal{P}}$ , fast jedes  $\omega_0$  ist dabei zulässig. Wir benutzen wieder die Abkürzungen  $g_\delta$  und  $f_\varepsilon$  für die Glättungen

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(30.29)}{=} \langle g, \nabla^{\mathcal{P}} \mathcal{J}_\varepsilon f_\delta \rangle_{\mathcal{P}} \stackrel{(30.30)}{=} \langle g, \mathcal{J}_\varepsilon \nabla^{\mathcal{P}} f_\delta \rangle_{\mathcal{P}} \stackrel{(30.28)}{=} \langle \mathcal{J}_\varepsilon g, \nabla^{\mathcal{P}} f_\delta \rangle_{\mathcal{P}} \\ &\stackrel{(E)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \tilde{g}_\varepsilon(x; \omega_0) \cdot \nabla_x \tilde{f}_\delta(x; \omega_0) dx \\ &\stackrel{(P)}{=} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \nabla_x \cdot \tilde{g}_\varepsilon(x; \omega_0) \tilde{f}_\delta(x; \omega_0) dx \\ &\stackrel{(E)}{=} \langle \nabla^{\mathcal{P}} \cdot g_\varepsilon, f_\delta \rangle_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Im mit (P) markierten Schritt verwenden wir eine partielle Integration. Diese ist für geeignete Teilfolgen  $R = R_l \rightarrow \infty$  gerechtfertigt, denn das Randintegral bleibt (auf geeigneten Kugelschalen) beschränkt, wir teilen aber durch das Volumen der großen Kugeln. Der letzte Schritt verwendet dieselben Tatsachen wie die ersten drei Gleichungen.

Im Limes  $\delta \rightarrow 0$  erhalten wir  $\langle \nabla^{\mathcal{P}} \cdot g_\varepsilon, f \rangle_{\mathcal{P}}$  für die beliebig gewählte Funktion  $f$ , also  $\nabla^{\mathcal{P}} \cdot g_\varepsilon = 0$ . Dann ist auch fast jede Realisierung von  $g$  divergenzfrei im Distributionssinn, denn für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{P}$ -fast jedes  $\omega$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x, \omega) \cdot \nabla_x \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x+y, \omega) \cdot \nabla_x \varphi(x) dx \phi_\varepsilon(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}_\varepsilon(x, \omega) \cdot \nabla_x \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x \cdot \tilde{g}_\varepsilon(x, \omega) \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{\mathcal{P}} \cdot g_\varepsilon(T_x \omega) \varphi(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Diese Rechnung liefert das gewünschte Resultat,  $g \in L^2_{sol}(\Omega_{\mathcal{P}})$ . □

## Konstruktion approximativer Lösungen im Stochastischen

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass man nicht gezwungen ist, mit den “Gradienten”  $\psi_k$  aus Satz 30.2 zu arbeiten. Man kann zu  $\psi_k$  auch für fast jedes  $\omega$  die Realisierung aufintegrieren.

**Lemma 30.15.** *Für fast jedes  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$  gibt es ein Potential  $Q_k(\cdot; \omega) \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  so dass  $\psi_k := \nabla Q_k + e_k$  das stochastische Zellproblem aus Satz 30.2 löst. Nach Skalierung gilt auch*

$$Q_k^\varepsilon(x; \omega) := Q_k(x/\varepsilon; \omega) \text{ erfüllt } \psi_k^\varepsilon := \nabla(\varepsilon Q_k^\varepsilon) + e_k.$$

Wir können  $Q_k(\cdot; \omega)$  so wählen, dass

$$\varepsilon \|Q_k^\varepsilon(\cdot; \omega)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \tag{30.32}$$

für fast alle  $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ .

Wir betonen, dass wir nicht erhalten, dass  $Q_k$  homogen ist.

*Beweis.* Die Realisierung  $\psi_k$  ist für fast jedes  $\omega$  curl-frei, also existiert zu  $\psi_k$  (und auch zu  $\psi_k - e_k$ ) ein Potential. Dies liefert  $Q_k(\cdot; \omega)$ . Wir wählen  $Q_k(\cdot)$  so, dass  $Q_k^\varepsilon(\cdot)$  einen verschwindenden Mittelwert auf  $\Omega$  hat. Der Birkhoff Ergodensatz liefert  $\nabla(\varepsilon Q_k^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbb{E}(\psi_k - e_k) = 0$  in  $L^2$ . Dies liefert die schwache  $H^1(\Omega)$  und die starke  $L^2(\Omega)$  Konvergenz  $\varepsilon Q_k^\varepsilon \rightarrow 0$ .

Wir verwenden nun elliptische Regularitätstheorie: Für Lösungen von  $\nabla \cdot (a \nabla u) = 0$  auf  $B_{2R} \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq C(\max(a), \min(a), R) \|u\|_{L^2(B_{2R})}.$$

Mit  $R > 0$  so groß, dass  $\Omega \subset B_R$  liefert dies (30.32) für festes  $\omega$ .  $\square$

**Vergleich der Lösung mit expliziter Konstruktion** Wir erwarten, dass sich die Lösung verhält wie

$$v^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \sum_k \partial_{x_k} u(x) Q_k(x/\varepsilon). \quad (30.33)$$

wir nehmen im Folgenden an, dass  $u^\varepsilon \rightarrow u^0$  schwach in  $H^1(\Omega)$  und stark in  $L^2(\Omega)$  für eine noch unbekannte Grenzfunktion  $u^0$ . Wir stellen fest, dass  $v^\varepsilon \rightarrow u$  schwach in  $H^1(\Omega)$  und stark in  $L^2(\Omega)$ . Für den nachfolgenden Beweis nehmen wir an, dass die Lösung  $u$  der homogenisierten Gleichung von der Klasse  $H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  ist.

Um nachzuweisen, dass  $u^\varepsilon - v^\varepsilon$  tatsächlich klein ist (und, in Konsequenz,  $u^0 = u$ ) testen wir die Differenz der Gleichungen für  $u^\varepsilon$  und für  $u$  mit der Differenz  $u^\varepsilon - v^\varepsilon$ ,

$$\nabla \cdot [a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon - a_* \nabla u] = 0 \quad \cdot (u^\varepsilon - v^\varepsilon).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega [a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon - a_* \nabla u] \cdot \nabla (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \\ &= \int_\Omega [a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon - a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon] \cdot \nabla (u^\varepsilon - v^\varepsilon) + \int_\Omega [a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a_* \nabla u] \cdot \nabla (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \\ &= \int_\Omega a_\varepsilon |\nabla (u^\varepsilon - v^\varepsilon)|^2 + \int_\Omega [a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a_* \nabla u] \cdot \nabla (u^\varepsilon - v^\varepsilon). \end{aligned}$$

Im letzten Integral ist der zweite Faktor ein Gradient und konvergiert schwach in  $L^2(\Omega)$  gegen  $\nabla(u^0 - u)$ . Für den ersten Faktor gilt

$$a_\varepsilon(x) \nabla v^\varepsilon(x) = \sum_k \partial_{x_k} u(x) a_\varepsilon(x) (e_k + \nabla Q_k(x/\varepsilon)) + O(\varepsilon)$$

in  $L^2(\Omega)$  wegen Lemma 30.15. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon &\rightharpoonup a_* \nabla u \text{ in } L^2(\Omega) \\ \nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon) &\text{ kompakt in } H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Unterhalbstetigkeit der Norm und das div-curl-Lemma erlauben zu rechnen

$$\begin{aligned}
 \lambda \|\nabla(u - u^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_{\varepsilon} |\nabla(u^{\varepsilon} - v^{\varepsilon})|^2 \\
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [a_{\varepsilon} \nabla v^{\varepsilon} - a_* \nabla u] \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - v^{\varepsilon}) \\
 &= - \int_{\Omega} [a_* \nabla u - a_* \nabla u] \cdot \nabla(u^0 - u) = 0.
 \end{aligned}$$

Der obige Beweis funktioniert für glatte Lösungen  $u$  der Grenzgleichung. Im allgemeinen Fall kann die Methode aber auch verwendet werden, indem man die Lösung des Grenzproblems  $u$  durch eine glattere Approximation  $u_h$  ersetzt und die Funktion  $v^{\varepsilon}$  zu  $u_h$  konstruiert. Das Vorgehen ist dann wie in Abschnitt 28.3.