

Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen

Mit der Algebra der (2 x 2)- bzw. (4 x 4)-Matrizen schuf Cartan, aufbauend auf Ideen von Graßmann, Clifford, Pauli und Dirac, eine geometrisch fundierte Algebra, die von David Hestenes (z.B. in Hestenes 2002 & 2003) und anderen Autoren (z.B. in Parra Serra 2009) didaktisch aus- und aufgearbeitet wurde. Sowohl in der hochschulischen Lehre wie auch im Bereich schulischen Unterrichtens hat sich der Einsatz der Geometrischen Algebra als ein Instrument zur Modellierung physikalischer Sachverhalte (siehe z.B. in Horn 2010 & 2011) wie auch originär mathematischer Bezüge bewährt.

Eines der zentralen didaktischen Motive für die Wirksamkeit der Geometrischen Algebra ist die konzeptuelle Eingänglichkeit dieses Ansatzes: Operatoren und Operanden werden durch gleichartige mathematische Objekte erfasst. So werden Pauli-Matrizen nicht nur als Basisvektoren des dreidimensionalen Euklidischen Raumes (und damit als Operanden, auf die eingewirkt wird) interpretiert, sondern sie stellen gleichzeitig Basis-Reflexionen (und damit Operatoren, die auf Operanden einwirken) dar. In gänzlich analoger Weise werden Dirac-Matrizen als Basisvektoren und zugleich als Basis-Reflexionen vier- oder fünfdimensionaler Raumzeiten genutzt.

Nun sind Pauli- und Dirac-Matrizen geradzahlig quadratische Matrizen. In der Physik spielen jedoch in wesentlichen Bereichen auch ungeradzahlige Matrizen eine wichtige Rolle. So sind beispielsweise die zur Beschreibung von Quarks wichtigen Gell-Mann-Matrizen (3 x 3)-Matrizen. Deshalb wird im Folgenden versucht, den didaktischen Ansatz, dass Operatoren und Operanden gleichartig zu denken sind, auf (3 x 3)-Matrizen zu übertragen.

1. Basisgrößen der Geometrischen (3 x 3)-Algebra

Erkenntnistheoretisch folgt dieser Ansatz dem Diktum, dass auf negative Zahlen verzichtet werden kann, da diese ebenfalls einer operationellen Deutung unterworfen werden. Deshalb werden die S_3 -Permutationsmatrizen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hier als räumliche Einheitsvektoren interpretiert. Das Quadrat der Vektoren

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_0$$

entspricht der Einheitsmatrix, was die vorgeschlagene Interpretation stützt, denn die Einheitsmatrix entspricht im Kontext der Geometrischen Algebra einem Basisskalar. Die Zahl sieben wird so beispielsweise durch $7e_0$ dargestellt. Ein Vektor in der Geometrischen (3 x 3)-Algebra ist wie üblich eine Linearkombination der drei Einheitsvektoren:

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

Jetzt können die möglichen Produkte zweier Einheitsvektoren berechnet werden. Es zeigt sich, dass nur zwei verschiedene Produkte existieren:

$$e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 e_1 = e_3 e_2 = e_1 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Reflexionen in der Geometrischen (3 x 3)-Algebra

In der Geometrischen Algebra werden Reflexionen durch Dreifachprodukte generiert. Die räumliche Reflexion des Vektors r_1 an einer Achse in Richtung eines Einheitsvektors \hat{r}_2 wird durch die simple Multiplikation $r_1' = \hat{r}_2 r_1 \hat{r}_2$ beschrieben. In Analogie dazu können die möglichen Reflexionen aller Einheitsvektoren aufgefunden werden:

$$\begin{array}{lll} e_1 e_1 e_1 = e_1 & e_2 e_1 e_2 = e_3 & e_3 e_1 e_3 = e_2 \\ e_1 e_2 e_1 = e_3 & e_2 e_2 e_2 = e_2 & e_3 e_2 e_3 = e_1 \\ e_1 e_3 e_1 = e_2 & e_2 e_3 e_2 = e_1 & e_3 e_3 e_3 = e_3 \end{array}$$

Diese Reflexionsgleichungen sind nur zu erfüllen, wenn die drei Einheitsvektoren e_1 , e_2 und e_3 in einer Ebene liegen und jeweils einen Winkel von

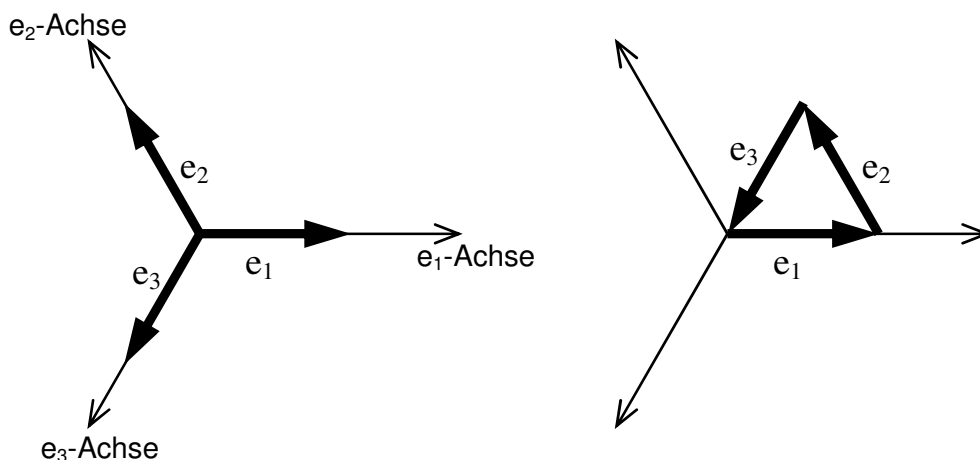


Abb. 1: Geometrische Lage der Einheitsvektoren (links) und alternative Repräsentation von Null (rechts).

120° einschließen (siehe Abb. 1). Dies hat Konsequenzen für die Darstellung der Größe Null. Üblicherweise wird die (3 x 3)-Matrix, deren Elemente durchgängig Null sind, mit dem neutralen Element der Addition identifiziert. Wir verharren auf der gleichen Stelle, wenn wir keinen Schritt gehen.

In Abb. 1 ist rechts jedoch eine alternative Darstellung der Größe Null angedeutet. Gehen wir einen Schritt in e_1 -Richtung, sodann einen Schritt in e_2 -Richtung und abschließend einen Schritt in e_3 -Richtung, erreichen wir unsere ursprüngliche Position wieder und haben in der Summe eine Strecke der Länge Null zurückgelegt. Deshalb macht es Sinn, die an jeder Position mit der Zahl eins belegte (3 x 3)-Matrix

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

mit der Nullmatrix zu identifizieren. Es existieren somit unendlich viele mögliche Repräsentationen der Größe Null, was der Situation bei den reellen Zahlen entspricht. Nur bewegen wir uns bei den reellen Zahlen auf Achsen, die im Winkel von 180° zueinander stehen, wenn wir Größen wie $4 + (-4)$ oder $17 + (-17)$ als identisch auffassen.

3. Alternative Darstellungen von Minus Eins

Die Addition aller drei Einheitsvektoren e_1 , e_2 und e_3 liefert das gleiche Resultat wie die Addition der beiden Produkte $e_1 e_2$ und $e_2 e_1$ mit der Einheitsmatrix e_0 . Da die Einheitsmatrix als Skalar der Bedeutung von „plus eins“ interpretiert werden kann, hat dieser Sachverhalt konzeptuell einschneidende Konsequenzen. Die Summe ($e_1 e_2 + e_2 e_1$) und eine Größe, die die Zahl eins repräsentiert, ergibt eine Größe, die Null repräsentiert. Deshalb ist es nur konsequent, den Ausdruck ($e_1 e_2 + e_2 e_1$) als eine Größe, die die Zahl „minus eins“ repräsentiert, zu deuten.

Negative Zahlen sind nur im algebraischen Sinne negativ. Im geometrischen Sinn entstehen sie durch eine Richtungsumkehr. Liegt eine eindeutige Verknüpfung geometrischer und algebraischer Strukturen vor, wie dies in der Geometrischen Algebra der Fall ist, kann die algebraische Negativität durch die geometrische Operation ersetzt werden. Wir benötigen dann keine negativen Zahlen mehr. Der Ausdruck ($e_1 e_2 + e_2 e_1$) liefert diese Richtungsumkehr. Beispielsweise gilt wie erwartet: $(e_1 e_2 + e_2 e_1) e_2 = e_1 + e_3$

4. Eine Welt ohne negative Zahlen

In der Einleitung wurde die strukturelle Gleichartigkeit von Objekten, die Operatoren und Operanden repräsentieren, als eines der wesentlichen di-

daktischen Motive für die Wirksamkeit der Geometrischen Algebra diskutiert. Hinter diesem didaktischen Motiv steht ein tieferes Grundmuster, das in das Wesen der Geometrischen Algebra weist: die unumschränkte Verknüpfung algebraischer und geometrischer Beziehungen. „Geometrie ohne Algebra ist stumm – Algebra ohne Geometrie ist blind“, lautet das Diktum von Hestenes und Sobczyk (Gull et al. 1993), das diesen Sachverhalt treffend charakterisiert.

Auch bei der konzeptionellen Beschreibung negativer Größen kommt dieses strukturelle Muster zum Tragen. Es wird jedoch nicht sichtbar, wenn man die Negativität durch Zugrundelegen orthogonaler Koordinatenachsen verschleiert. Deshalb hat die Geometrisch (3 x 3)-Algebra auch eine erkenntnistheoretisch wichtige Funktion. Wir haben hier eine voll funktionsfähige Welt, die ohne negative Zahlen auskommt!

5. Ceterum Censeo

„In Anlehnung an den historischen Ausspruch spricht man heute von einem *Ceterum censeo*, wenn eine Forderung beharrlich wiederholt wird“ (Wikipedia 2012). Ebenso wie in meinen bisherigen Arbeiten zur Geometrischen Algebra möchte ich abschließend darauf hinweisen, dass die Lineare Algebra sowohl im schulischen wie im hochschulischen Kontext durch die Geometrische Algebra ersetzt werden sollte. Die Geometrische Algebra ist nicht nur in der klassischen Form der Pauli- und Dirac-Algebra weit wirkungsmächtiger und didaktisch einsichtiger als die bisher praktizierte Lineare Algebra. Sie bietet in der hier vorgestellten Form unter Nutzung von S_3 -Permutationsmatrizen auch erkenntnistheoretisch tragfähige Vorzüge.

Literatur

- Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, 1175-1201.
- Hestenes, D. (2002): New Foundations for Classical Mechanics. New York: Kluwer.
- Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, 104-121.
- Horn, M. E. (2010): Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen – Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Münster: WTM-Verlag, 417-420.
- Horn, M. E. (2011): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche & al. (Hrsg.): From Past to Future – Grassmann's Work in Context. Grassmann Bicentennial Conference. Basel: Birkhäuser-Verlag, 435-450.
- Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3-4, 819-834.
- Wikipedia (2012): Ceterum censeo Carthaginem esse delendam (23.03.2012, 19:00).