Konvexe Funktionen und wichtige Ungleichungen

Seminar Analysis (SoSe 2013)

Martin Strickmann

06. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenfassung/Abstract

In dieser Seminararbeit werden wichtige Ungleichungen der Analysis vorgestellt. Besonders wichtig sind dabei vor allem die Hölder-Ungleichung, die Minkowski-Ungleichung und die Jensensche-Ungleichung, die zu den fundamentalen Ungleichungen der Analysis gehören. Die Beweisführung dieser Ungleichungen stützt sich dabei auf die besonderen Eigenschaften konvexer beziehungsweise konkaver Funktionen. Daher werden in dieser Seminararbeit zunächst konvexe Funktionen definiert, sowie einige Eigenschaften und Folgerungen aus der Konvexität einer Funktion aufgeführt. Darauf basierend werden im Zentralen Kapitel dieser Seminararbeit wichtige Ungleichungen der Analysis vorgestellt. Abschließend zeigt ein Beispiel, wie sich diese Ungleichungen auf andere Bereiche der Analysis anwenden lassen.

This seminar saper deals with important inequalities of analysis. The main focus will be put on the Hölder-inequality, the Minkowski-inequality and the Jensen-inequality, which belong to the most important inequalities of analysis.The proof of these inequalities is based on the special features of convex and concarve functions. For that reason convex functions will be defined at the beginning of this seminar paper. Additionally some features and consequences of the convexity of a function will be mentioned. Based on that important inequalities of analysis will be presented in the main part of this seminar paper. Finally an example will show how these inequalities can be applied to other areas of analysis.

2 Konvexe Funktionen

Definition 2.1. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* auf einem Intervall I, wenn für alle Punkte $P_1 = (x_1, f(x_1))$ und $P_2 = (x_2, f(x_2))$, mit $x_1, x_2 \in I$, die Sekante durch P_1 und P_2 immer oberhalb des Graphen von f verläuft, das heißt, wenn die Ungleichung

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und ein $\lambda \in (0, 1)$ erfüllt ist. Eine Funtion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konkav* auf einem Intervall I, wenn $-f$ auf I konvex ist, also wenn

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{2}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und ein $\lambda \in (0,1)$ erfüllt ist.

Gelten in (1) und (2) nicht $\leq$ und $\geq$ sondern $<$ und $>$, so heißt f *streng konvex* beziehungsweise *streng konkav.*

Satz 2.2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex auf I, wenn für alle $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3}$$

Diese Aussage bedeutet, dass die Differenzenquotienten von f monoton wachsen. Etwas ausführlicher gilt für konvexe Funktionen dann:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{4}$$

Proof. Jedes $x \in (x_1, x_2)$ lässt sich schreiben als $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit $\lambda \in (0,1)$. Setzen wir dies in (3) ein erhalten wir:

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}{x_2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

Multipliziere mit $x_2 - x_1 > 0$ sowie mit $\lambda(1-\lambda) > 0$:

$$\lambda\left(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)\right) \leq (1-\lambda)\left(f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

$\square$

Satz 2.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist sie genau dann konvex auf I, falls die erste Ableitung $f^{'}$ auf I monoton wachsend ist.*

Proof. Sei f konvex, dann gilt mit (3) für alle $x_1 < x_2$:

$$f^{'}(x_1) = \lim_{x \downarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \uparrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f^{'}(x_2)$$

$\Rightarrow f$ ist monoton steigend.

Sei nun $f^{'}$ monoton steigend. Wir betrachten $x_1 < x < x_2$. Mit der Monotonie von $f^{'}$ sowie dem Mittelwertsatz und passenden Werten $\tilde{x_1} \in (x_1, x)$ und $\tilde{x_2} \in (x, x_2)$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f^{'}(\tilde{x_1}) \leq f^{'}(\tilde{x_2}) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

□

Bemerkung 2.4. Direkt aus Satz 2.3 folgt, dass eine zweimal differenzierbare Funktion f genau dann konvex ist, falls ihre zweite Ableitung $f^{''} \geq 0$ ist.

Beispiel 2.5. Die Funktion e^x ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, die Funktion $\log(x)$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$.

Definition 2.6. Sei $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere ein $x_0 \in I$, sodass f auf (a, x_0) konvex und auf (x_0, b) konkav ist, oder auf (a, x_o) konkav und auf (x_0, b) konvex. Dann hat f an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*.

Beispiel 2.7. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng konkav auf $\mathbb{R}_-$ und streng konvex auf $\mathbb{R}_+$. Nach Definition 2.6 hat f in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt.

Satz 2.8. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann gilt:*

1. *Die einseitigen Ableitungen $f^{'}_-(a) = \lim_{x\uparrow a} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ und $f^{'}_+(a) = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existieren.*
2. *f ist stetig.*
3. *f ist differenzierbar auf $I \backslash M$, wobei $M \subseteq I$ eine höchstens abzählbare Ausnahmemenge ist.*

Proof. 1. Für alle $x_1 < x < x_2 \in I$ wissen wir, dass $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ gilt. Betrachten wir nun eine beliebige Stelle $a \in I$, sowie die Differenzenquotienten $\Delta(x) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ für $x \in (x_1, a)$ und $\tilde{\Delta}(\tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x})-f(a)}{\tilde{x}-a}$ für $\tilde{x} \in (a, x_2)$. Nun ist $\Delta(x)$ monoton steigend und durch $\tilde{\Delta}(\tilde{x})$ nach oben beschränkt, dementsprechend existiert $\lim_{x\uparrow a} \Delta(x) = f^{'}_-(a)$. Analog ist $\tilde{\Delta}(\tilde{x})$ monoton steigend und durch $\Delta(x)$ nach unten beschränkt, dementsprechend existiert $\lim_{\tilde{x}\downarrow a} \tilde{\Delta}(\tilde{x}) = f^{'}_+(a)$.

2. Da $f_-^{'}(a)$ existiert, folgt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|\frac{f(a)-f(a-\delta)}{\delta} - f_-^{'}(a)| < \epsilon$ ist. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit δ erhalten wir $|f(a)-f(a-\delta)-\delta f_-^{'}(a)| < \delta\epsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt nun, dass

$$\begin{aligned} |f(a) - f(a-\delta)| &\leq |f(a) - f(a-\delta) - \delta f_-^{'}(a)| + |\delta f_-^{'}(a) \\ &\leq \delta\epsilon + \delta|f_-^{'}(a)| = \delta\left(\epsilon + |f_-^{'}(a)|\right) < \tilde{\epsilon}, \end{aligned}$$

für alle $\tilde{\epsilon} > 0$ und einem ausreichend kleinem δ. Somit ist f linksseitig stetig für alle $a \in I$. Analog lässt sich mit $|\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} - f_+^{'}(a)| < \epsilon$ die rechtsseitige Stetigkeit von f für alle $a \in I$ zeigen.

3. Für monotone Funktionen auf einem Intervall I ist die Menge der Unstetigkeitsstellen höchstens abzählbar (vergleiche Kaballo, *Einführung in die Analysis I*, 8.20). Da $f_-^{'}$ monoton wachsend ist, ist $f_-^{'}$ nun auf allen, bis auf höchstens abzählbar vielen Stellen stetig. Nun existiert $f^{'}$ an jeder Stetigkeitsstelle von $f_-^{'}$, also auch an allen, bis auf höchstens abzählbar vielen Stellen. Daraus folgt, dass f bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmestellen differenzierbar ist.

$\square$

3 Wichtige Ungleichungen

Durch die Eigenschaften konvexer Funktionen lassen sich verschiedene Ungleichungen beweisen, die in der Analysis sehr wichtig sind.

Lemma 3.1. *Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sowie $a, b \geq 0$, dann gilt:*

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{5}$$

Proof. Im Falle $a \cdot b = 0$ ist die Aussage korrekt. Betrachte den Fall $a \cdot b > 0$. Sei $x = \log(a)$ und $y = \log(b)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot b = e^x \cdot e^y = e^{x+y} &= e^{(\frac{1}{p}px + \frac{1}{q}qy)} \\ \leq \frac{1}{p}e^{(px)} + \frac{1}{q}e^{(py)} &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 3.2. Zusätzlich sei an dieser Stelle die bekannte Dreiecksungleichung aufgeführt, da sie in kommenden Beweisführungen benutzt wird. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{6}$$

Satz 3.3 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiter seien $f, g \in R(J)$ zwei Regelfunktionen auf einem Intervall J, dann gilt:*

$$\int_J |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_J |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Proof. Da die Betragsfunktion und alle Potenzfunktionen Regelfunktionen sind, sind auch $|f|^p$ und $|g|^q$ Regelfunktionen. Sei nun

$$A_\epsilon = \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon, \qquad B_\epsilon = \left(\int_J |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} + \epsilon,$$

sowie $a = \frac{|f(x)|}{A_\epsilon}$ und $b = \frac{|g(x)|}{B_\epsilon}$, dann gilt mit Lemma 3.1:

$$\frac{f(x)g(x)|}{A_\epsilon B_\epsilon} = a \cdot b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q = \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A_\epsilon^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B_\epsilon^q}.$$

Integration der Ungleichung auf beiden Seiten liefert:

$$\frac{1}{A_\epsilon B_\epsilon}\int_J |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{pA_\epsilon^p}\int |f(x)|^p dx + \frac{1}{qB_\epsilon^q}\int_J |g(x)|^q dx.$$

Da nun $\frac{1}{A_\epsilon^p}\int_J |f(x)|^p dx, \frac{1}{B_\epsilon^q}\int_J |g(x)|^q dx < 1$ ist, erhalten wir

$$\frac{1}{A_\epsilon B_\epsilon}\int_J |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und durch Multiplikation mit $(A_\epsilon B_\epsilon)$

$$\int_J |f(x)g(x)|dx \leq A_\epsilon B_\epsilon.$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt dann die Aussage:

$$\int_J |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_J |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Beispiel 3.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** Betrachte für die Höldersche Ungleichung 3.3 den Speziallfall mit $p = q = 2$, dann gilt:

$$\int_J |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_J |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_J |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Diese Ungleichung heißt *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*

Satz 3.5 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $p \geq 1$ sowie $f, g \in R(J)$ zwei Regelfunktionen auf einem Intervall J, dann gilt:*

$$\left(\int_J |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Diese Ungleichung heißt Minkowskische Ungleichung. *Betrachten wir $||f||_p = \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, so bemerken wir, dass die Minkowskische Ungleichung einfach eine Dreiecksungleichung für die L_p-Norm von Funktionen ist.*

Proof. Für $p = 1$ ist der Beweis klar, die Ungleichung folgt dann direkt durch Integration der Dreiecksungleichung.

Betrachte nun $A = \int_J |f(x) + g(x)|^p dx$. Für $A = 0$ ist (8) ebenfalls erfüllt, somit kann im Folgenden $A > 0$ angenommen werden. Nun wird die Dreiecksungleichung aus 3.2 sowie die Höldersche Ungleichung aus Satz 3.3 angewendet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_J |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \int_J |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_J |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_J |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_J |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_J |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_J |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\int_J |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_J |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\left(\int_J |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot A^{\frac{1}{q}}.$$

Dabei nutzen wir im Vorletzten Rechenschritt aus, dass $(p-1)q = p$ gilt, denn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Leftrightarrow p = pq - q$. Nun dividieren wir die erhaltene Ungleichung noch durch $A^{\frac{1}{q}} > 0$, dann folgt unsere Aussage:

$$A^{\frac{1}{p}} = \left(\int_J |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_J |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Lemma 3.6. *Seien $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 1, 2, ..., n$, sowie $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Proof. Der Beweis folgt direkt aus Satz 3.3 mit den Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \chi_{(k-1,k)}$ und $g = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \chi_{(k-1,k)}$, sowie der charakteristischen Funktion χ. $\square$

Lemma 3.6 ist also ein Spezialfall der Hölderschen Ungleichung. Mit der selben Beweisführung erhalten wir ebenfalls einen Spezialfall der Minkowski Ungleichung.

Lemma 3.7. *Seien $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 1, 2, ..., n$, sowie $p \geq 1$, dann gilt:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

Definition 3.8. Seien $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Für Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ heißt die Zahl

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \tag{12}$$

das *gewichtete Mittel.*

Satz 3.9 (Jensensche Ungleichung). *Seien $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, dann ist auch jedes zugehörige gewichtete Mittel $x \in I$. Des weiteren gilt für alle gewichteten Mittel x, sowie für eine konvexe Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$:*

$$\phi(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi(x_k). \tag{13}$$

Proof. Sei $I = (a, b)$ dann gilt:

$$a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b = b.$$

Also ist $x \in I$. Bleibt die Jensensche Ungleichung zu zeigen,wobei der Fall $n = 1$ trivial ist und der Fall $n = 2$ direkt aus der Konvexität von ϕ folgt. Mit der Induktionsannahme, dass die Ungleichung für $n-1$ Zahlen bereits erfüllt ist, zeigen wir dies nun für n Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n \in I$. Sei dazu $\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$, dann gilt $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda} = 1$. Weiter sei $y = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k$, wobei $y \in I$ ist. Daraus ergibt sich, dass $x = \lambda y + \lambda_n x_n$ und $\lambda + \lambda_n = 1$ ist und somit auch $x \in I$ ist.. Nun gilt wegen der Konvexität von ϕ und der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi\left(\lambda y + \lambda_n x_n\right) \\
&\leq \lambda \phi(y) + \lambda_n \phi(x_n) \\
&= \lambda \phi\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k\right) + \lambda_n \phi(x_n) \\
&\leq \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda} \phi(x_k) + \lambda_n \phi(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi(x_k).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.10. *Seien $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, dann gilt*

$$\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k. \tag{14}$$

Proof. Betrachte $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ und wende die konkave Logarithmus-Funktion an, dann gilt:

$$\log\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \log(x_k).$$

Anwenden der Exponentialfunktion auf die Ungleichung liefert dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k &\geq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \log(x_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\lambda_k \log(x_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\exp(\log(x_k))\right)^{\lambda} \\ &= \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\lambda_k}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.11. Betrachten wir die Ungleichung aus Lemma 3.10 für den Spezialfall mit $\lambda_k = \frac{1}{n}$ für alle $k = 1, 2, ..., n$,dann erhalten wir folgende Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{15}$$

4 The Fat Elephant Inequality

Betrachten wir im Folgenden eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ aus N verschiedenen Punkten im $\mathbb{R}^3$, also hat S die Mächtigkeit N. Genauer betrachten wir die Projektionen von S auf jede der Koordinatenebenen, also auf die xy-Ebene, die xz-Ebene und die yz-Ebene. Es soll nun gezeigt werden, dass mindestens eine dieser Projektionen eine Mächtigkeit von mindestens $N^{\frac{2}{3}}$ haben muss. Daher auch der Name *Fat elephant theory*: Ein dicker Elefant kann nicht aus allen drei Richtungen dünn aussehen, aus mindestens einer Richtung muss man erkennen, dass er dick ist.

Wir führen an dieser Stelle die Charakteristische Funktion $\chi_S : \mathbb{R}^3 \to \{0,1\}$ ein, mit $\chi(x,y,z) = 1$, falls $(x,y,z) \in S$ und $\chi_s(x,y,z) = 0$, falls $(x,y,z) \notin \mathbb{R}^3$. Analog dazu definieren wir mit $\chi_{xy}(x,y)$, $\chi_{xz}(x,z)$ und $\chi_{yz}(y,z)$ die charakteristischen Funktionen der Projektionen von S. Hier sei erwähnt, dass jede dieser charakteristischen Funktionen gleich ihrem Quadrat ist, also $\chi^2 = \chi$ und so weiter. Dies wird an späterer Stelle noch benötigt.

Bemerkung 4.1. Seien S, N sowie χ, χ_{xy}, χ_{xz} und χ_{yz} wie oben gegeben, dann gilt:

$$\chi(x,y,z) \leq \chi_{xy}(x,y) \cdot \chi_{xz}(x,z) \cdot \chi_{yz}(y,z), \tag{16}$$

das heißt, dass $\chi(x,y,z) = 1$ nur gilt, falls alle charakteristischen Funktionen der Projektionen auch gleich 1 sind. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht.

Beispiel 4.2. Sei $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, dann ist $\chi(0,0,0) = 0$, aber $\chi_{xy}(0,0) = \chi_{xz}(0,0) = \chi_{yz}(0,0) = 1$.

Bemerkung 4.3. Seien S, N sowie χ wie oben gegeben, dann gilt:

$$\sum_{x,y,z} \chi(x,y,z) = N \tag{17}$$

Wenden wir nun die Bemerkungen 4.1 und 4.3, sowie Satz 3.6 mit $p = 2$ auf N an, dann folgt

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{x,y,z} \chi(x,y,z) \\
&\leq \sum_{x,y,z} \chi_{xy}(x,y) \cdot \chi_{xz}(x,z) \cdot \chi_{yz}(y,z) \\
&= \sum_{x,y} \chi_{xy}(x,y) \left(\sum_{z} \chi_{xz}(x,z) \chi_{yz}(y,z) \right) \\
&\leq \left(\sum_{x,y} {\chi_{xy}}^2(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{x,y} \left(\sum_{z} \chi_{xz}(x,z) \chi_{yz}(y,z) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{x,y} {\chi_{xy}}^2(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(\sum_{x,y} \left(\sum_{z} {\chi_{xz}}^2(x,z) \right) \left(\sum_{z} {\chi_{yz}}^2(y,z) \right) \right)^{\frac{1}{2} \cdot 2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{x,y} {\chi_{xy}}^2(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{x,y} \left(\sum_{z} {\chi_{xz}}^2(x,z) \right) \left(\sum_{z} {\chi_{yz}}^2(y,z) \right) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{x,y} \chi_{xy}(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{x,y} \left(\sum_{z} \chi_{xz}(x,z) \sum_{z} \chi_{yz}(y,z)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{x,y} \chi_{xy}(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{x,z} \chi_{xz}(x,z)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{y,z} \chi_{yz}(y,z)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |P_{xy}(S)|^{\frac{1}{2}} |P_{xz}(S)|^{\frac{1}{2}} |P_{yz}(S)|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

mit den Projektionen $P_{xy}(S)$, $P_{xz}(S)$ und $P_{yz}(S)$ von S auf die Koordinatenebenen. Quadrieren wir diese Ungleichung erhalten wir

$$|S|^2 = N^2 \leq |P_{xy}(S)||P_{xz}(S)||P_{yz}(S)|.$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun, dass mindestens eine dieser Projektionen eine Mächtigkeit von mindestens $N^{\frac{2}{3}}$ besitzen muss. Damit ist die *Fat elephant inequality* bewiesen.

Literatur

[1] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis I*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 2000.

[2] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Springer Verlag, 2003.