technische universität dortmund

Seminar Analysis für Lehramt Gymnasium

Thema 4: Die schwingende Saite - Wellenfunktion und deren Herleitung

Nora Held *

Vortrag am 16.April 2013

*nora.held@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die Wellengleichung ist eine von der Physik und Mathematik häufig untersuchte Differentialgleichung. Sie beschreibt, wie sich eine Schwingung im Raum ausbreitet, beispielsweise die Vibration einer gezupften Saite.
Der Vortrag beschäftigt sich mit ebendiesem Problem der Saite, die in Schwingung versetzt wurde. Die Vorraussetzung, dass die Saite an ihren Anfangs- und Endpunkten fest eingespannt ist, liefert die *Randbedinungen*, während diese zusammen mit Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit, mit der sie losgelassen wird, und der Wellengleichung das *Anfangswertproblem* umfassen.

Dazu stellt sich zunächst stellt sich die Frage, welche Klasse von Funktionen die von der Wellengleichung geforderten Bedingungen und gegebene Randwertprobleme erfüllen.
Im realen Fall der schwingenden Saite muss jene zunächst in Schwingung versetzt werden, welches das Anfangswertproblem liefert. Gelöst wird dieses durch eine Superposition der im vorhergegangenen Abschnitt ermittelten *Elementarfunktionen*.

Als zugrunde liegende Literatur wurden die Quellen [1], [2], [3] und [4] verwendet.

Abstract

The *wave equation* is a frequently analysed differential equation in physics and mathematics and describes the propagation of an oscillation, for example the vibration of a picked string.
The lecture deals with this mentioned Problem of the string that has been set in motion. The *boundary condition* is given by the fact that the string is fixed at both its start- and endpoint. Combined with its ititial velocity and displacement and the wave equation, the *initial value problem* is covered.

First of all we have to answer the question which class of functions satisfy the conditions given by the wave equation and potential boundary values.
The real case of the vibrating string is of course described by the intial value problem because the string has to be set in motion first before it is able to fulfill an oscillation.
It is composed of a *superposition* of the previously determined *elementary functions*.

The lecture is based on the references [1], [2], [3] and [4].

1 Problemstellung

Betrachten wir eine Saite, die an ihren Endpunkten in einer Apparatur fest eingespannt wird.
Um später möglichst einfache Gleichungen zu erhalten wählen wir die Längeneinheit der Saite fortfolgend als $l = \pi$.
Durch andere Normierungen kann diese Länge in jedes beliebige Maß umgewandelt werden. Aus später ersichtlichen Gründen wird die Länge der Saite als π gewählt.

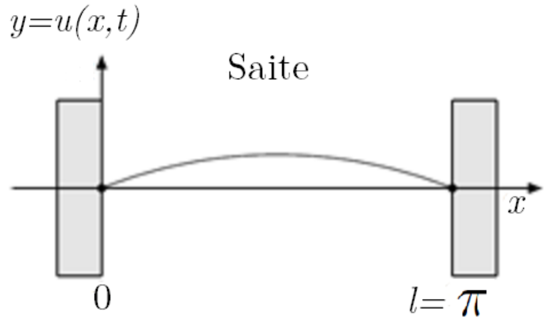

Abbildung 1: Angezupfte Saite (me-lrt.de, modifiziert)

Abbildung 1 zeigt eine Saite, die in einer Achse x an ihrem Anfangs- ($l = 0$) und Endpunkt ($l = \pi$) eingespannt ist. Die $x-$Achse besitzt Längendimension und ist die unabhängige Größe. Auf der $y-$ Achse ist die vom Ort x abhängige Auslenkung der Schwingende Saite aufgetragen, deren Funktion im folgenden mit u bezeichnet wird.
Da die Saite sich in ihren Anfangs- und Endpunkten nicht bewegen kann, nimmt die Funktion der Auslenkung u hier den Wert $u = 0$ an.

Offensichtlich hängt diese Funktion u vom Ort x aber auch von der Zeit t ab, da die Auslenkung sich mit der Zeit verändert.
Somit ist eine Funktion $u(x, t)$ zu bestimmen, die das Randwertproblem der festen Endpunkte, sowie ein Anfangswertproblem für fest vorgegebene Anfangswerte (die Saite wird schließlich gezupft) löst.

Im folgenden Abschnitt 2 wird zunächst die Klasse der Funktionen gesucht, die das Randwertproblem lösen, um später in Abschnitt 3 eine vollständige Lösung für Anfangswertprobleme zu finden.
Als letztes wird in Abschnitt 4 kurz auf die Konvergenz von Fourierreihen eingegangen um danach ein Anfangswertproblem für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit auszurechnen.

2 Randwertproblem

2.1 Herleitung der Wellengleichung

Die sogenannte Wellengleichung beschreibt das Verhalten einer Schwingung. In unserem Fall betrachten wir nur eine eindimensionale Schwingung.

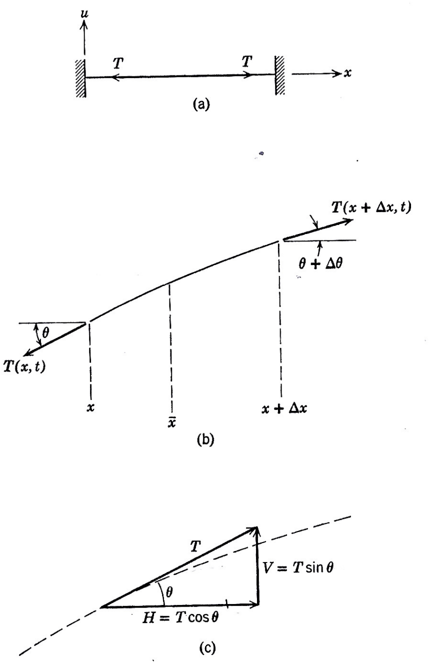

Abbildung 2: Kräfte, die auf ein Saitenstück wirken([1])

Betrachte eine elastische Saite, die entlang einer Achse x fest zwischen zwei Anfangs- und Endpunkten $x = 0$ und $x = \pi$ in einer Apparatur eingespannt ist.
Wird die Saite bewegt und danach nicht weiter gestört, wird sie anfangen, frei zu schwingen. Gesetzt dem Fall, man vernachlässigt Dämpfungseffekte.
Um die Differentialgleichung für diese Problem herzuleiten, betrachten wir zunächst nur die Kräfte, die auf ein minimales Stück der Saite mit der Länge Δx zwischen den Punkten x und $x + \Delta x$ einwirken. Zunächst werden daraus die Regeln für die Bewegung durch einen Differenzenquotienten hergeleitet und anschließend lässt man durch einen Limes das entstandene Steigungsdreieck gegen einen Differentialquotienten (=Ableitung) gehen.
Da wir nur den eindimensionalen Fall betrachten, nehmen wir an, dass die Saite sich nur auf einer vertikalen Linie entlang der y-Achse schwingt. Die Funktion $u(x, t)$, die schon in Abschnitt 1 genannt wurde, beschreibt die Auslenkung der Saite.
Weiterhin bezeichnet $T(x, t)$ die Spannung der Saite, die lediglich **tangential** wirkt und ρ die Dichte der Saite.

Nach Newton's Gesetz $F = m \cdot a$ wird die Kraft, die auf die Saite ausgeübt wird, durch das Produkt der Masse m und der Beschleunigung a des Massenschwerpunktes $\bar{x}$ der Saite bestimmt. Durch die Einspannung der Saite findet keine horizontale Beschleunigung statt, sodass sich aus dem Steigungsdreieck aus Abbildung 2 ergibt:

$$T(x + \Delta x, t)\cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\cos(\theta) = 0 \tag{2.1.1}$$

mit der horizontalen Komponente H der Spannung, die gegeben ist durch: $H(x, t) = T(x) \cdot cos(\theta)$ (siehe Abbildung 2).
Aus Gleichung (2.1.1) folgt, dass $H = H(t)$, also H unabhängig von x ist. Die vertikale Komponente $V(x, t) = T\sin(\theta)$ der Spannungsdifferenz hingegen sind durch Gleichung (2.1.2) gegeben, wobei die Gravitation vernachlässigt wurde.

$$\begin{aligned} & T(x + \Delta x, t)\sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\sin(\theta) = \rho\Delta x u_{tt}(\bar{x}, t) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{T(x + \Delta x, t)\sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\sin(\theta)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

wobei $\bar{x}$ der Massenschwerpunkt des Stückes ist. Offensichtlich gilt $x \leq \bar{x} \leq x + \Delta x$.
Die vertikale Komponente V kann geschrieben werden als:

$$\frac{V(x+\Delta x, t) - V(x,t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t) \tag{2.1.3}$$

Lässt man nun den Limes $\Delta x \to 0$ gehen, so erhält man aus dem Differenzenquotient die Ableitung von V nach x:

$$V_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t) \tag{2.1.4}$$

mit $V(x,t) = H(t)\tan(\theta) = H(t)u_x(x,t)$ erhält man

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt} \tag{2.1.5}$$

und da H unabhängig von x ist:

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt} \tag{2.1.6}$$

Für gewöhnlich schreibt man Gleichung (2.1.6) in der Form

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{2.1.7}$$

wobei $\alpha^2 = \frac{H}{\rho}$ ist.

Die Funktion u muss somit der Gleichung (2.1.8) genügen, wobei ∂ die partielle Ableitung nach der jeweiligen Variablen beschreibt und α eine Konstante ist.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{oder umgeformt:} \tag{2.1.8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1.9}$$

Betrachtet man das Problem in n Dimensionen, muss bei der Ortsableitung ∂_x beachtet werden, dass sich die Beschreibung des Ortes aus n Koordinaten zusammensetzt, sodass sich die Wellengleichung in n Dimensionen allgemein zu Gleichung (2.1.10) ergibt.
Da sich das Problem analog zum eindimensionalen Fall durchexerzieren lässt, betrachten wir der Einfachheit halber nur Letzteren.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{2.1.10}$$

Die Gleichungen gehören zu der Klasse der *homogenen, partiellen Differentialgleichungen* (im folgenden DGL genannt).
Das bedeutet, dass die rechte Seite der Gleichung (2.1.8) keine *Inhomogenität* H enthält, sondern 0 ist. In der physikalischen Interpretation bedeutet das, dass wir den Fall ohne Reibung betrachten, da die Reibung durch H beschrieben werden würde.
Weiterhin kommen die partiellen Ableitungen nach den Variablen x und t vor, was sie von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*[1] unterscheidet.

[1] Anmerkung: gewöhnliche DGLn können von mehreren Variablen abhängen, es kommt aber nur die Ableitung einer Variable in der DGL vor.

2.2 Lösung der Wellengleichung

Nun suchen wir die Klasse von Funktionen, die Wellengleichung löst und somit die Bewegung der Saite beschreiben. Dazu betrachten wir zunächst nicht das vollständige Problem mit Anfangsbedingungen, sondern setzen nur die Randbedingungen, dass die Saite eingespannt ist, in die Wellengleichung ein.

Um die DGL zu lösen, greift man auf den in der Physik oft angewandten *Separationsansatz* (2.2.1) zurück.

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{2.2.1}$$

Das bedeutet, dass sich die Funktion $u(x,t)$ aus zwei Funktionen zusammensetzt, die jeweils nur von einer der beiden Variablen abhängen. Setzt man dies nun in die Wellengleichung (2.1.8) ein, so erhält man durch die partiellen Ableitungen nach t und x jeweils:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v(x)\ddot{w}(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = v''(x)w(t) \tag{2.2.2}$$

Setzt man die oben errechneten partiellen Ableitungen in die Wellengleichung (2.1.9) ein, so erhält man Gleichung (2.2.3)

$$\Rightarrow \quad v(x)\ddot{w}(t) = \alpha^2 v''(x)w(t) \tag{2.2.3}$$

und anhand von Division durch $v(x)$ und $w(t)$ Gleichung (2.2.4).

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(x)}{v(x)} \tag{2.2.4}$$

Da nun die Quotienten auf beiden Seiten der Gleichung (2.2.4) jeweils nur von t oder nur von x abhängen, bedeutet dies, dass beide Seiten entweder konstant sind oder $w(t) \equiv 0$ oder $v(x) \equiv 0$ ist.
Da letztere, triviale Lösung denkbar uninteressant ist, betrachten wir den ersten Fall, aus dem sich die sogenannte *Separationskonstante* λ ergibt.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{v''(x)}{v(x)} &= -\lambda \\ \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} &= -\alpha^2\lambda \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Stellt man die DGLn jeweils nach 0 um, erkennt man, dass die DGL (2.1.8) sich in zwei homogene DGLn mit konstanten Koeffizienten splittet, bei denen $w(t)$ und $v(x)$ Gleichung (2.2.6) genügen.

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{w} + \alpha^2\lambda w = 0 \tag{2.2.6}$$

Erfüllen v und w Gleichung (2.2.6), so sieht man leicht, dass sie auch DGL (2.1.8) lösen.
Probe:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(v(x)w(t)) = v(x)\ddot{w}(t) &= \alpha^2 v''(x)w(t) = \partial_x^2(v(x)w(t) \\ \Leftrightarrow \quad v(x)(-\alpha^2\lambda w(t)) &= \alpha^2(-\lambda v(x))w(t) \\ \Leftrightarrow \quad -\alpha^2\lambda v(x)w(t) &= -\alpha^2\lambda v(x)w(t) \quad \checkmark \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Nun setzen wir die in Abschnitt 1 beschriebene Bedingung ein, dass die Saite fest eingespannt ist. Daraus ergeben sich die Randwerte (2.2.8). Außerhalb dieser Randwerte ist die Funktion u nicht definiert, da wir diesen Bereich nicht betrachten.

$$u(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{2.2.8}$$

Gleichung (2.2.8) muss für alle Zeiten t gelten, da die Saite *dauerhaft* eingespannt ist. Der Bereich, auf dem unsere DGL definiert ist, ergibt sich so zu
Setzt man die Bediungen von Gleichung (2.2.8) in den Separationsansatz (2.2.1) ein, so erhält man Gleichung (2.2.9)

$$v(0)w(t) = v(\pi)w(t) = 0 \tag{2.2.9}$$

Da dies für alle $t \in [0,\infty)$ gelten muss, liegt entweder der Fall der ruhenden Saite vor ($u(x,t) \equiv 0$), oder es gilt, das Randwertproblem aus Gleichung (2.2.10) zu Lösen.

$$v'' + \lambda v = 0 \quad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{2.2.10}$$

Gesucht sind also nur die Lösungen der DGL (2.1.8), die die Randwertbedingungen (2.2.8) erfüllen.

Die Lösungen der ersten DGL aus (2.2.6) sind gegeben durch:

$$v(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad C_1, C_2 \text{ beliebig} \tag{2.2.11}$$

Wegen $v(0) = 0$ folgt, dass $C_1 = 0$ sein muss. Um nicht den trivialen Fall zu erzeugen, muss $C_2 \neq 0$ sein.
Der Sinus verschwindet jeweils nur bei ganzzahligen Vielfachen von π, sodass in unserem Fall $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ sein muss, wobei $n \in \mathbb{N}$.
Nach λ aufgelöst, ergibt sich die Bedingung (2.2.12),

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = n \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = n^2 \tag{2.2.12}$$

was bedeutet, dass das Randwertproblem nur für die Zahlen $\lambda = n^2 (n = 1, 2, ...)$ nichttrivial lösbar ist. Diese λ nennt man auch Eigenwerte und die dazugehörigen Funktionen aus Gleichung (2.2.15) Eigenfunktionen.
Mit diesen Einschränkungen gehen wir nun an die Lösung der zweiten DGL aus (2.2.6).
In diesem Falle sind die Lösungen durch

$$w(t) = \tilde{C_1} cos(\alpha nt) + \tilde{C_2} \sin(\alpha nt) \quad \tilde{C_1}, \tilde{C_2} \ beliebig \tag{2.2.13}$$

Dadurch ergibt sich die komplette Lösung des Randwertproblems zu Gleichung (2.2.14) und zusammengefassten Koeffizienten in (2.2.15)

$$u_n(x,t) := C_2 \sin(nx) \cdot (\tilde{C_1} \cos(\alpha nt) + \tilde{C_2} \sin(\alpha nt)) \tag{2.2.14}$$
$$u_n(x,t) := \sin(nx) \cdot (A_n \cos(\alpha nt) + B_n \sin(\alpha nt)) \tag{2.2.15}$$

wobei $A_n = \tilde{C_1} \cdot C_1$ und $B_n = \tilde{C_2} \cdot C_2$.
Die hergeleitete Klasse von Funkionen sind die *Elementarlösungen* für die Wellengleichung, die in Abschnitt 3 weiter spezifiziert wird.

2.3 Physikalische Interpretation

Die gefundene Klasse von Funktionen, die das Randwertproblem (2.2.8) lösen, wurde in Abschnitt 2.2 ermittelt und ist in Gleichung (2.2.15) dargestellt. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig läuft, gibt es unendlich viele Lösungen des Randwertproblems, bestehend aus der Wellengleichung (2.1.8) und den Randbedingungen (2.2.8).

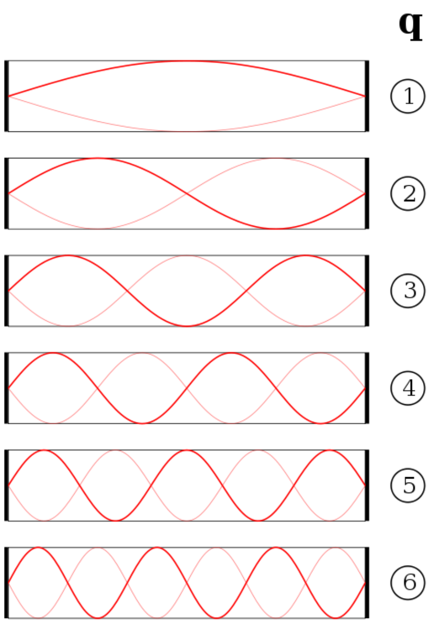

Abbildung 3: Verschiedene Schwingungsmoden (wikipedia.de)

Die jeweiligen Lösungen, die durch die laufenden n gegeben sind, nennt man *Schwingungsmoden*.
Wobei $n = 1$ die *Grundschwingung* beschreibt und $n \geq 2$ die sogenannten *Oberschwingungen*, deren Frequenz ν $(2\pi\nu = \omega)$ jeweils durch

$$\nu_n = \frac{\alpha n}{2\pi} \tag{2.3.1}$$

gegeben ist.

Bei einer realen Saite, die gezupft wird, überlagern sich diese Schwingungsmoden und ergeben so den Ton.
Die Überlagerung dieser Schwinungen nennt man auch *Superposition*.

Abbildung 3 zeigt die Moden 1-6 für eine Saite, die in Schwingung versetzt wurde.
Die Konstante α ist proportional zur Wurzel aus der Saitenspannung S, sodass die Obertöne bei einer Vergrößerung der Saitenspannung höher werden. Die Erhöhung der Spannung kann bei einer Geige zum Beispiel durch das Drehen des Wirbels erreicht werden, was die Spannung, unter der die Saite steht je nach Richtung, erhöht oder senkt. Auf diese Art und Weise werden Saiteninstrumente gestimmt.

3 Anfangswertproblem

Nachdem die Klasse von Funktionen bestimmt ist, die die Wellengleichung lösen, wird in diesem Abschnitt eine Lösung für gegebene Anfangswertprobleme (im folgenden mit AWP bezeichnet) bestimmt.

Dass die Saite in der Wirklichkeit zunächst gezupft werden muss, um zu Schwingen, wurde in Abschnitt 2 zunächst vernachlässigt. Durch diese Anfangsbedingung ergeben sich jedoch Einschränkungen für die möglichen Lösungen der Wellengleichung.
Die Auslenkung der Saite wird zu dem Zeitpunkt $t = 0$, an dem sie losgelassen wird, durch die Funktion $u(x, 0) = f(x)$ beschrieben, während die Anfangsgeschwindigkeit, mit der sie losgelassen wird, der Funktion $\partial_t u(x, 0) = g(x)$ genügt. Daraus ergibt sich das AWP:

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.0.2}$$
$$\partial_t u(x, 0) = g(x) \tag{3.0.3}$$

Die in Abschnitt 2 ermittelten *Wellenfunktionen* lösen zwar das Randwertproblem 2.2.8, in den meisten Fällen jedoch nicht das AWP (3.0.2) und (3.0.3).

3.1 Lösung der Wellengleichung im Anfangswertproblem

Um das Problem nun allgemein zu Lösen, betrachtet man eine *Superposition* von den errechneten *Elementarfunktionen*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cdot (A_n \cos(\alpha nt) + B_n \sin(\alpha nt)) \tag{3.1.1}$$

Wählt man die Koeffizienten A_n, B_n passend und konvergiert die Reihe, so stellt sie die Lösung des Problemes dar.

Setzt man die Superposition von Elementarfunktionen in das AWP (3.0.2),(3.0.3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = f(x) \\ \partial_t u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha n B_n \sin(nx) = g(x) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

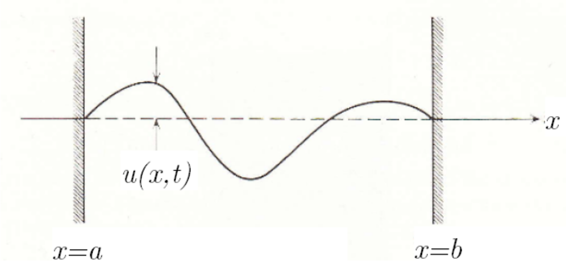

Abbildung 4: Schwingende Saite ([1], modifiziert)

Durch die Physik ist man so auf ein mathematisches Problem gestoßen: auf die Frage, ob man beliebige Funktionen - hier Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit - durch *Eigenfunktionen* entwickeln kann.

In unserem Beispiel wurden die Funktionen in Sinusreihen entwickelt. Es ist auch möglich, eine solche Entwicklung durch eine Cosinus- oder allgemein Trigonometrische Reihe durchzuführen. Dies führt zu der *Theorie der Fourierreihen* (siehe Abschnitt 4).

3.2 Eindeutigkeit der Wellenfunktion

Unsere gefundene Lösung u erfüllt das AWP, dass sich aus den Gleichungen (3.0.2), (3.0.3) und (2.2.8) zusammensetzt und in Gleichung (3.2.1) noch einmal zusammengefasst ist.
Als nächstes stellt sich die Frage, ob diese Wellenfunktion die einzige Lösung für das AWP ist, oder ob ein anderer Ansatz eventuell eine von (3.1.2) unterschiedliche Lösung liefert.

Satz 1 (Eindeutigkeit der Wellengleichung [1, S.82-83])**.** *Es existiert maximal eine Funktion $u \in C^2$, welche das Anfangswertproblem* (3.0.2) *und* (3.0.3) *löst.*

Beweis. durch Widerspruch.

Die Lösung ist auf dem Tupel $U_T = U$ x $[0,T] =]a,b[$ x $[0,T]$ definiert. Das Intervall $]a,b[$ ist deshalb offen, weil die Funktion u in den Punkten a und b zwar definiert ist, links von a und rechts von b jedoch nicht (siehe Abbildung 4). Das führt dazu, dass sie auf dem Rand nicht differenzierbar ist, weshalb die Punkte aus der Menge U_T herausgenommen werden müssen.
Da die Zeit von Beginn an beliebig lange läuft ($T \to \infty$), entstehen diese Probleme bei der Zeitableitung in $t = 0$ und $t = T$ nicht.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u &= f \\ u_t &= g \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Jede weitere Lösung muss dem AWP (3.2.1) ebenfalls genügen. Man sieht leicht, dass dies schon einmal für Vielfache von u nicht gilt.

Untersuchen wir nun eine weitere Funktion $\tilde{u}$, von der wir annehmen, dass sie das AWP löst. Betrachte dazu die Funktion w, die sich ergibt durch $w = u - \tilde{u}$.

Setzt man die Bedingungen für u und $\tilde{u}$ aus (3.2.1) für w ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} = (u_{tt} - \tilde{u}_{tt}) - (u_{xx} - \tilde{u}_{xx}) &= (u_{tt} - u_{xx}) - (\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx}) = 0 - 0 = 0 \\ w = u - \tilde{u} = f - f = 0 & \qquad (x,t) \in \Gamma_T \\ w_t = u_t - \tilde{u}_t = g - g = 0 & \qquad t = 0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Um nun $w(x,t)$ zu untersuchen, "testen"wir die Gleichung, indem wir einen bekannten Ausdruck mit einer Funktion multiplizieren[2].
Wir wissen aus Gleichung (3.2.2), dass $w_{tt} - w_{xx} = 0$ ist. Integriert man die Gleichung, multipliziert mit der *Testfunktion*, ergibt sich auch der Wert des Integrals zu 0.

$$0 = \int_U (w_{tt} - w_{xx}) w_t dx \tag{3.2.3}$$

Aus der Produktregel und einer partiellen Integration ergibt sich Ausdruck (3.2.4), von dem wir das Integral als $E(t)$ definieren:

$$0 = \int_U \frac{1}{2}\partial_t(w_t^2) + \underbrace{w_x \cdot \partial_x w_t}_{\frac{1}{2}\partial_t|\partial_x w|^2} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\int_U w_t^2 + |w_x|^2 dx}_{=:E(t)} \tag{3.2.4}$$

Wir wissen also, dass $\frac{d}{dt}E(t) = \dot{E}(t) = 0$ ist. Daraus folgt, dass die *Energiefunktion* $E(t)$ konstant ist.
Der Wert für $t = 0$ ist aus Gleichung (3.2.2) bekannt mit $w_t(0) = 0$, sodass $E(0) = 0$. Die überall verschwindende Ableitung bedeutet damit, dass die Funktion $E(t) \equiv 0$ ist.
Daraus folgt, dass $w_t = w_x \equiv 0$ ist. Somit ist w konstant.
Auch hier setzen wir wieder unser AWP ein:

$$w(t = 0) = 0 \Rightarrow w \equiv 0 \Rightarrow u = \tilde{u} \qquad \lightning \tag{3.2.5}$$

Widerspruch zur Annahme, $u \neq \tilde{u}$
$\Rightarrow$ Annahme, es existiere ein weiteres $\tilde{u} \neq u$, dass das AWP (3.2.1) löst, war falsch $\Rightarrow u$ ist eindeutige Lösung. $\square$

[2] folgender Vorgang wird auch *Methode des Energieintegrals* genannt

4 Fourierreihen

Die Idee von Fourierreihen ist es, Funktionen durch Superposition von sogenannten Eigenfunktionen (meißt Sinus oder Cosinus) darzustellen.

4.1 Eigenschaften

Die Entwicklung der Wellenfunktion im Rahmen des Anfangswertproblemes, die in Abschnitt 3.1 durch eine Fourierreihe, die die Superposition von Schwingungen beschreiben, lässt sich nicht für alle Funktionen anwenden.
Den Gleichungen entsprechend scheint es zunächst, als könnte man zu jeder beliebigen Funktion eine Fourierreihe mit den Fourierkoeffizienten A_n und B_n aufstellen. Sie approximieren die Funktion jedoch nur, wenn die Reihe auch wirklich konvergent ist.

Satz 2 (Fouriersches Theorem [2])**.** *Ist die Reihe* (4.2.1) *konvergent, so stellt sie eine* $T-$*periodische Funktion* $f(t)$ *dar und für die Koeffizienten* A_n *und* B_n *gilt Gleichung* (4.1.2)*.*

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t) + B_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin(\frac{2\pi n}{T} t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos(\frac{2\pi n}{T} t) dt \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Bemerkung. *Die Konstante c aus Gleichung* (4.1.2) *ist frei wählbar, praktischerweise wählt man sie jedoch meist $c = 0$ oder $c = -\frac{T}{2}$ um über ein Symmetrisches Intervall zu integrieren.*

Nun ist es wichtig, für welche Klassen von Funktionen die Fourierreihe überhaupt konvergiert.

Satz 3 (Konvergenz der Fourierreihe für stetige Funktionen[4](Satz 40.13))**.**
Ist f 2π-periodisch und zweimal stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe normal gegen f.

Satz 4 (Klasse der beschränkten Variation [2](Satz 136.2))**.**
Ist die 2π periodische Funktion f auf $[-\pi, \pi]$ von beschränkter Variation[3]*, so konvertiert ihre Fourierreihe für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegen $\frac{f(t+)-f(t-)}{2}$.*
An jeder Stetigkeitsstelle x besitzt die Fourierreihe also die Summe $f(x)$.

Satz 5 (L^2 Konvergenz [2](Satz 141.1))**.**
Die Fourierreihe jeder L^2 Funktion f konvergiert im quadratischen Mittel stets gegen f.

---

[3] Ein Funktion von beschränkter Variation oszilliert nicht beliebig stark

4.2 Beispiel einer schwingenden Saite mit gegebenem Anfangswertproblem

Betrachte das AWP, bei dem die Anfangsauslenkung der Saite $f(x) = x$ ist. Da es sich um eine *ungerade* Funktion handelt, müssen die Elementarfunktionen, mit denen f entwickelt wird auch ungerade sein. Da der cos eine gerade Funktion ist und der sin eine ungerade, sind die Koeffizienten B_n aus (4) 0.[4]

Es gilt also nur, die Koeffizienten A_n der Reihe (4.2.1) zu berechnen.

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(nx) \tag{4.2.1}$$

Diese erhält man durch die Integration (4.2.2), wobei T die Periode der Funktion ist, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Schwingungsfrequenz und die Konstante c den Beginn des Intervalles, auf dem die Funktion definiert ist, beschreibt. c ist beliebig wählbar, da sich durch die geforderte Periodizität für jedes Intervall $I_c = [c, c+T]$ der gleiche Wert ergibt.

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{c}^{c+T} f(x)\cdot \sin(\omega n x)dx \tag{4.2.2}$$

Der Einfachheit halber wählen wir $c = -\pi$, um später über ein symmetrisches Intervall zu integrieren.
Mit $T = 2\pi$ und $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ erhält man:

$$A_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin(\frac{2\pi}{2\pi}nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)dx \tag{4.2.3}$$

Mit *partieller Integration* ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\left([\frac{-t}{n}\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left([\frac{-t}{n}\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{[\frac{1}{n^2}\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n - (-\frac{1}{-\pi})(-1)^n\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n + \frac{-\pi}{n}(-1)^k\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{-2\pi}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Und damit:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) \tag{4.2.5}$$

Damit haben wir die Anfangsauslenkung $f(x)$ der Saite als Fourierreihe ausgedrückt. Dies ist notwendig, um nun die Wellenfunktion für das AWP (3.0.2) mit $u(x,0) = f(x)$ zu berechnen.

[4]Dies lässt sich auch einfach rechnerisch nachprüfen, bei der Cos-Integration der B_n ergibt sich das Integral zu 0.

Um die Fourierkoeffizienten für die Wellenfunktion $u(x,t)$ zu bestimmen, setzen wir die Bedingung $u(x,0) = f(x)$ aus Gleichung (3.1.2) für die Anfangsauslenkung ein und machen einen Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} f(x) = u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left(A_n \cos(\alpha n \cdot 0) + B_n \sin(\alpha n \cdot 0)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left(A_n \cdot 1 + B_n \cdot 0\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) A_n \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Setzen wir die berechnete Fourierreihe aus (4.2.5) für $f(x)$ ein erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \tag{4.2.7}$$

Woraus sich ergibt, dass die A_n der Fourierreihe für die Wellenfunktion $u(x,t)$ gegeben sind durch:

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \tag{4.2.8}$$

Um die B_n zu berechnen, bräuchte man noch eine Anfangsgechwindigkeit $g(x) = \partial_t u(x,0)$, die man Fourier-entwickeln müsste, um anschließend einen Koeffizientenvergleich zu machen.
Sagen wir, die Anfangsgeschwindigkeit $g(x) \equiv 0$, dann ergibt sich wieder mit Gleichung (3.1.2) für die Anfangsgeschwindigkeit :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha n B_n \sin(nx) \\ &\Rightarrow B_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Sodass die Fourierreihe der Wellengleichung mit den Koeffizienten aus den Gleichungen (4.2.8) und (4.2.9) gegeben ist durch:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \tag{4.2.10}$$

Literatur

[1] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems.* Wiley, 2001.

[2] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis 2.* Teubner GmbH, 1992.

[3] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch.* Teubner GmbH, 1995.

[4] W. Kaballo. *Analysis 1.* Spektrum Verlag, 2006.