Die Methode von Lyapunov

Seminararbeit

am Lehrstuhl für Analysis
Technische Universität Dortmund

Seminarleiter: Univ.-Prof. Thomas Dohnal

vorgelegt von: O. Bergen

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Der Mathematiker A.M. Lyapunov hat in seiner Dissertation von 1892 ”Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung“ zwei Methoden zur Behandlung von Stabilitätsfragen eingeführt. Während die erste Methode von spezieller Natur ist, hat sich seine zweite oder direkte Methode zu einem außerordentlichen nützlichen Hilfsmittel entwickelt. Sein Grundgedanke basiert auf der physikalischen Interpretation der Systemenergie. Eine Ruhelage eines physikalischen Systems ist stabil oder asymptotisch stabil, wenn die Energie des Systems in der Nähe der Ruhelage ständig abnimmt. Sofern bewiesen werden kann, dass die Systemenergie um die Ruhelage stetig abnimmt, ist sogleich der Nachweis geführt, dass das nichtlineare System um die Ruhelage stabil sein muss [1].
Im ersten Teil dieser Seminararbeit werden nach einigen Voraussetzungen die Lyapunov-Funktion und ihre Eigenschaften definiert, sowie der Stabilitätssatz und der Instabilitätssatz eingeführt und bewiesen. Anhand einiger Beispiele wird die Stabilität der Nullösung mittels der Lyapunov-Funktion gezeigt. Im zweiten Teil der Ausarbeitung befinden sich vorbereitende Definitionen und Sätze, die zum Verständniss des Stabilitätssatzes vom LaSalle[2]. und seines Beweises dienen. Auch hier soll ein Beispiel zum besseren Verständniss der Materie dienen. Die Seminararbeit basiert auf dem Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ von Wolfgang Walter[3].

[1] Dilaver, Kamil: “Analyse der asymptotischen Stabilität nichtlinearer Systeme mit Hilfe des Satzes von Ehlich und Zeller.“Dissertation, Bergischen Universität Wuppertal. Istanbul 2008.

[2] Joseph Pierre LaSalle geb. 1916 war ein US-amerikanischer Mathematiker, der sich mit Differentialgleichungen und deren Stabilitätstheorie befasste.

[3] Walter, Wolfgang: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung.“ 7. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 2000, S. 337 – 345.

Abstract

In his dissertation „Das allgemeine Stabilitätspoblem der Bewegung“ the mathematician A.M. Lyapunov introduced 1892 two methods for dealing with questions of stability. While the first method is of a more specific nature, his second or direct method has developed into an extraordinarily useful tool. His fundamental idea was based on the physical interpretation of the energy in systems. The rest position of a physical system is stable or asymptotically stable, if the system’s energy continuously declines in the vicinity of the rest position. Provided it can be verified, that the energy of the system does decline continuously around the rest position, we simultaneously acquired proof for the nonlinear system having to be stable near the rest position.
In the first part of this term paper the Lyapunov-function and its properties will be defined, after a set of prerequisites. Furthermore the theorem of stability and the theorem of instability will be introduced and proven. Illustrated by examples the stability of the zero solution will be shown by means of the Lyapunov-function. The second part will contain preparatory definitions and theorems for the comprehension and proof of stability-theorem of LaSalle. Again an example will be supplemented to serve a better comprehension of the matter. This term paper is based on the book „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ by Wolfgang Walter.

Definitionen und Bememrkungen 1.1. (a) Das System $y' = f(x, y)$ nennt man autonom, wenn die rechte Seite $f(x, y)$ nicht explizit von x abhängt. Es hat die Form $y' = f(y)$.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und f: $D \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Das Bild einer maximalen Lösung eines autonomen Systems $y' = f(y)$ nennt man eine Trajektorie.

(c) Besteht eine Trajektorie aus einem einzigen Punkt $x \in D$, so nennt man diese Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ Ruhelage oder Gleichgewichtslage.
Es ist bequem , den festen Punkt von Anfang an in den Ursprung zu legen. Die Analogie zu der Ruhelage $x(t) \equiv a$ mit $f(a) = 0$, ist mit kleinen Abänderungen leicht ersichtlich, man führt eine Koordinatentransformation durch und ersetzt z(t) wieder durch y(t), denn die Differnz z(t)=y(t)-a genügt der Gleichung $z' = h(z)$ mit $h(z) = f(a + z)$. Hierbei ist $h(0) = f(a) = 0$.

(d) Wir betrachten reelle autonome Systeme

$$y' = f(y) \tag{1.1}$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und f in D Lipschitz-stetig mit $0 \in D$ und $f(0) = 0$.
Die Lösung $y(t)$ von (1.1), mit dem Anfangswert $y(0) = \eta$ ist dann eindeutig bestimmt und wird als $y(t; \eta)$ bezeichnet.

(e) Die Ruhelage heißt exponentiell stabil, falls es postitive Konstanten β, γ, c gibt, so dass aus:

$$|y(0)| < \beta$$
$$|y(t)| < ce^{-\gamma t} \text{ für } t > 0.$$

folgt und die Lösungen in $[0, \infty)$ existieren.

2 Stabilität nach Lyapunov

Definition 2.1. *Gegeben seien eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $f = (f_1, \dots f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ und eine reellwertige Funktion $V \in C^1(D)$.Die Ableitung von V in Richtung f, längs Trajektorien ist durch folgende Formel definiert:*

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) : &= (grad\ V(x), f(x)) = f_1(x) \cdot V_{x_1}(x) + \cdots + f_n(x) \cdot V_{x_n}(x) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[V(x + tf(x)) - V(x)]
\end{aligned}
$$

Da für eine Lösung $y(t)$ von (1.1) gilt:

$$
\frac{\partial}{\partial t} V(y(t)) = (gradV(y(t)), y'(t)) = (gradV(y(t)), f(y(t))) = \dot{V}(y(t))
$$

lassen sich Aussagen über das Verhalten von V längs einer Trajektorie auf das Verhalten der Lösung y(t) treffen. Daher wird die Methode auch direkt genannt, weil man mittels dieser Methode direkt aus der rechten Seite der betrachteten autonomen Differentielgleichung, also ohne Kenntnis der Lösung (d.h. auch wenn die Gleichung nicht differenzierbar ist), auf die Stabilität von Trajektorie schließen kann[1].
Eine Lypanuov-Funktion für die Differentialgleichung (1.1) ist eine Funktion $V \in C^1(D)$, mit den Eigenschaften

$$
V(0) = 0,\ V(x) > 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \dot{V}(x) \leq 0 \text{ in } D.
$$

[1] Aulbach, Bernd. Gewöhnliche Differentialgleichungen $S.346$

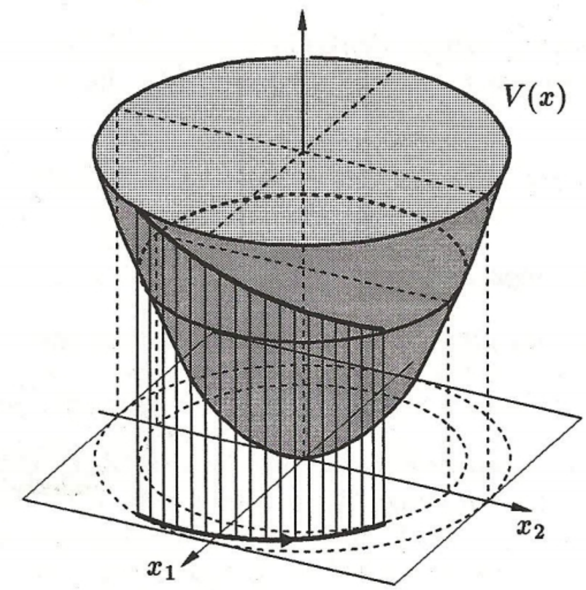


Abbildung 2.1: Zur geometrischen Bedeutung einer Lyapunov-Funktion der Form $V(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$
Quelle: Aulbach, Bernd. Gewöhnliche Differentialgleichungen. $S.336$

Eine Trajektorie des Systems (1.1) kann also im Phasenraum nur so verlaufen, dass die Einschränkung der Lyapunov-Funktion V(x) auf die Trajektorie im Sinne der Orientierung der Trajektorie fällt (siehe Abb. 2.1). Eine Lyapunov-Funktion ist also gewissermaßen ein über dem Phasenraum liegender Indikator, der qualitativ den Verlauf der Trajektorien des Systems beschreibt[2]. Die zentrale Idee der Lyapunov Methode besteht darin, die Stabilität von (1.1) mit Hilfe der Eigenschaften von V(x) festzustellen. Der folgende Satz ist die Verbindung zwischen den Begriffen der Lyapunov-Funktion und Stabilität.

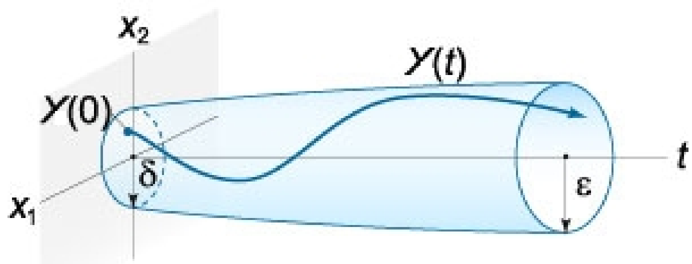
Satz 2.1. ***Stabilitätssatz nach Lyapunov***
Sei $f \in C(D)$ und $f(0) = 0$ und es existiere eine Lyapunov-Funktion V zu f. Dann gilt:

[2]Aulbach, Bernd. Gewöhnliche Differentialgleichungen. $S.335$

(a) $\dot{V} \leq 0$ *in* $D \Rightarrow$ *die Nullösung von (1.1) ist stabil.*

(b) $\dot{V} < 0$ *in* $D \setminus \{0\}$ *die Nullösung von (1.1) ist asymptotisch stabil.*

(c) $\dot{V} \leq -\alpha V$ *und* $V(x) \geq b|x|^{\beta}$ *in* D $(\alpha, \beta, b > 0) \Rightarrow$ *die Nullösunug ist exponentiell stabil.*

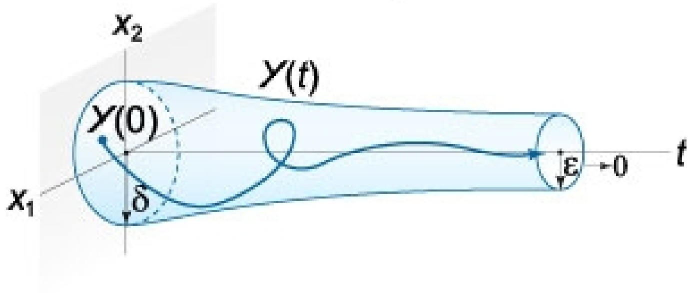


Beweis:. (a)

Abbildung 2.2: Stabilität.Beweisskizze für n=2, in Zeitabhängigkeit
Quelle: www.Math24.net[3]

Man nehme eine Lyapunov-Funktion V(x) in $\bar{B}_{\epsilon}$, $\epsilon > 0$, so dass die abgeschlossene Kugel $\bar{B}_{\epsilon}$ in D liegt Es ist zu zeigen, dass eine Trajektorie, die in der Nähe von $y(0) \in \bar{B}_{\delta}$ beginnt in diesem Bereich auch bleibt, d.h. y(0)$\in \bar{B}_{\delta} \Rightarrow y(t) \in \bar{B}_{\delta}$ $\forall t > 0$. Da V auf D positiv und stetig ist, folgt dass V ein positives Minimum auf $\bar{B}_{\epsilon}$ hat, d.h man wählt ein positives γ derart, daß $V(x) \geq \gamma$ für $|x| = \epsilon$ gilt, wegen der Stetigkeit von V(x) und der Voraussetzung V(0)=0 gibt es δ>0 mit $0 < \delta < \epsilon$ so, daß $V(x) < \gamma$ für $|x| < \delta$ ist, da $V(x)$ stetig und im Ursprung verschwindet. Für eine Lösung y von (1.1) mit $|y(0)| < \delta$ hat die Funktion $\phi(t) = V(y(t))$ eine Ableitung $\phi'(t) \leq 0$, es ist also $\phi(t) \leq \phi(0) < \gamma$. Da $V(x)$ auf der Sphäre $|x| = \epsilon$ nur Werte $\geq \gamma$ annimmt, bleibt $|y(t)| < \epsilon$, solange die Lösung(nach rechts) existiert. Hieraus ergibt sich sowohl die Existenz der Lösung im ganzen Intervall $J = [0, \infty)$ als auch die Abschätzung $|y(t)| < \epsilon$ in J.

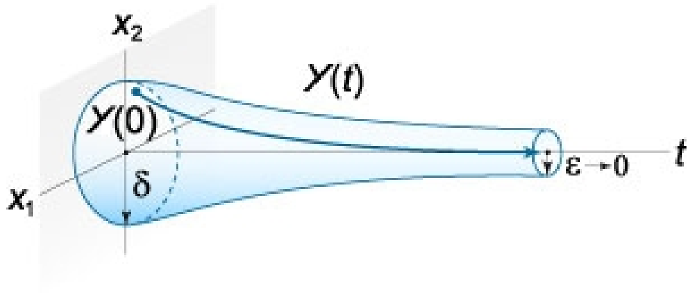
Für eine Lösung $y(t)$ mit $\phi(t) = V(y(t))$, wie sie in (a) betrachtet wurde, da V streng monoton fallend $\forall t \in [0, \infty)$ existiert $\lim_{t \to \infty} \phi(t) = \beta < \gamma$, und es ist $\beta \leq \phi(t) < \gamma$ für



(b)

Abbildung 2.3: Asymptotische Stabilität. Beweisskizze für n=2, in Zeitabhängigkeit
Quelle: Math24.net

$t > 0$. Zu zeigen in diesem Beweisschritt ist, dass $\beta = 0$, indem die Annahme $\beta > 0$ zum Widerspruch geführt wird . Da $V(y(t))$ als Funktion monoton fällt, gilt $V(y(t)) \geq \beta > 0 \forall t \geq 0$. Man wähle ein $\delta > 0$ so klein, dass $\bar{B}_\delta \subset MeinerkompaktenTeilmengevon\bar{B}_\epsilon \setminus \{0\}$. Da $\dot{V}(x)$ stetig und M kompakt ist, existiert eine Zahl $-\alpha := max\{\dot{V}(x) : x \in M\} < 0$. Zusammen folgt die Beziehung $\dot{V}(y(t)) \leq -\alpha < 0$. Da die Lösung y in M verläuft, würde sich $\phi'(t) \leq -\alpha$ und damit ein Widerspruch zu $\beta \leq V(x)$ ergeben, denn $V(x)$ ist stets nichtnegativ. Es sit also $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$. Hieraus folgt nun $y(t) \to 0 (t \to \infty)$. Denn für ein positives $\epsilon' < \epsilon$ hat V auf der Menge $\epsilon' \leq |x| \leq \epsilon$ ein positives Minimum δ. Also ist $|y(t)| < \epsilon'$, sobald $\phi(t) < \delta$ ist, d.h. für alle großen t.



(c)

Abbildung 2.4: Exponentielle Stabilität. Skizze für n=2, in Zeitabhängigkeit
Quelle: www.Math24.net

Es ist $b\,|y(t)|^\beta \leq V(y(t)) = \phi(t)$ und $\phi' \leq -\alpha\phi$, dies wird von einer e-Funktion erfüllt, also nach dem Satz Obefunktionen, Unterfunktionen (vgl. Walter S. 98) $\phi(t) \leq \phi(0)e^{-\alpha t}$. Daraus folgt $|y(t)| \leq (\frac{\phi(0)}{b})^{1/\beta} \leq ce^{-\gamma t}$ mit $\gamma = \alpha/\beta > 0$.

□

Die folgenden Beispiele zeigen, dass man mit der Lyapunov Methode die Stabilität direkt aus der Differentialgleichung ohne Kenntnisse der Lösung bestimmen kann.

Beispiel 2.1. Nichlineare Schwingungen ohne Reibung [4]

Die Gleichung

$$x'' + h(x) = 0$$

kann als Bewegungsgleichung einer punktförmigen Masse unter Einwirkung einer Federkraft -h(x) gedeutet werden, wobei h für alle x differenzierbar sein soll. Führt man $y = x'$ ein, dann ist diese Gleichung äquivalent zu $x' = y,\ y' = -h(x)$. Dieses System hat den Ursprung als einzige Ruhelage. $h(x)$ soll sich wie eine Gerade durch den Ursprung verhalten, so daß $xh(x) > 0$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 0$. Sei $H(x) = \int_0^x h(\varsigma)d\varsigma$. Die kinetische Energie der Masse ist $\frac{1}{2}y^2$ und ihre potenzielle Energie $H(x)$. Um das Problem der

[4]Vgl. LaSalle, J.; Lefschetz S.: Die Stabilitätstheorie von Ljapunow, $S.43 - 45$

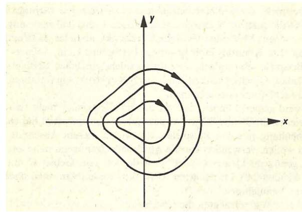


Abbildung 2.5: Beispiel 2.3
Quelle: LaSalle, J.; Lefschetz S.: Die Stabilitätstheorie von Ljapunow, $S.44$

Stabilität der Lösung zu untersuchen, betrachten wir die Energiefunktion $E(x,y) = V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x h(\varsigma)d\varsigma$. Hiermit gilt $E(x,y) > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $\dot{E}(x,y) \equiv 0$, d.h. V ist eine Lyapunov-Funktion. Also ist die Nulllösung stabil.
In der Tat sind die Wege $V(x) = k^2$, die Werte von V entlang der Lösungskurve. In der Darstellung $y = \left|\sqrt{2(k^2 - H(x))}\right|$ erkennt man, dass es geschlossene Kurven sind, die den Ursprung umlaufen, so daß dieser nicht asymptotisch stabil ist.

Beispiel 2.2. Nichtlineare Schwingungen mit Reibung

Nun betrachten wir eine nichtlineare Schwingung mit Reibung mit einem linearen Reibungsglied $\epsilon x'(\epsilon > 0)$

$$x'' + \epsilon x' + h(x) = 0 \Leftrightarrow x' = y, y' = -h(x) - \epsilon y$$

Für diese Gleichung erhält man, wenn E wie oben angegebene Energiefunktion ist,

$$\dot{E} = -\epsilon y^2$$

Die Energie nimmt, wie zu erwarten ab. Daraus lässt sich nicht der Schluss ziehen, dass die Ruhelage asymptotisch stabil ist, da für alle Punkte mit $y = 0$ (also die gesamte x-Achse) $\dot{V} = 0$ gilt. Mit der gegeben Lyapunov-Funktion kann man es nicht nachweisen. Tatsächlich ist die Ruhelage asymptotisch stabil, dies lässt sich mit dem Stabilitätssatz von Lasalle, der in Kapitel 3 aufgeführt wird, zeigen.

Satz 2.2. *Instabilitätssatz*
Es sei $V \in C^1(D)$, $V(0) = 0, V(x_k) > 0$ für eine Folge (x_k) aus D mit $x_k \to 0$. Ist $\dot{V} > 0$ für $x \neq 0$ oder $\dot{V} \geq \lambda V$ in D mit $\lambda > 0$, so ist die Ruhelage instabil.
Sie ist insbesondere dann instabil, wenn $V(x) > 0$ und $\dot{V}(x) > 0$ für $x \neq 0$ gilt.

Beweis:. Es sei y eine Lösung von (1.1) mit $y(0) = x_k$, also $\phi(0) = \alpha > 0$, wobei wieder $\phi(t) = V(y(t))$ gesetzt wird. Wir betrachten den ersten Fall und wählen $\epsilon > 0$ derart, daß $V < \alpha$ in $\bar{B}_\epsilon$ ist. Da $\phi' \geq 0$, also $\alpha = \phi(0) \leq \phi(t)$ ist, haben wir $|y(t)| > \epsilon$. Nun sei $\bar{B}_r$ eine abgeschlossene, in D gelegene Kugel ($r > \epsilon$). Da ϕ' positiv ist, kann V längs $y(t)$ nur anwachsen und somit strebt y(t) nicht zu der Ruhelage, daher für $\epsilon \leq |x| \leq r$ ist $\dot{V}(x) \geq \beta > 0$, also $\phi\prime \geq \beta$ und $\phi(t) \geq \alpha + \beta t$, solange $y(t) \in B_r$ ist. V kann nicht gegen einen festen Wert gehen. Es muss größer werden und y(t) muss somit die Kugel B_r in endlicher Zeit verlassen.
Im zweiten Fall ist $\phi\prime \geq \lambda\phi(t)$, woraus $\phi(t) \geq \alpha e^{\lambda t}$ folgt. Also ist auch hier $|y(t)| > r$ für große t. Wegen $x_k \to 0$ gibt es demnach Lösungen mit beliebig kleinen Anfangswerten, welche die Kugel B_r verlassen. Da x_k Nullfolge, existieren Lösungen y mit beliebig kleinen Anfangswerten x_k so, daß $|y(t)| > r$ für große Zeiten t. □

3 Stabilität nach LaSalle

Voraussetzungen und Definitionen 3.1. *In diesem Abschnitt muss die Funktion V bis auf Satz 3.3 keine Lyapunov-Funktion sein.*
Die Lösungen von (1.1) existieren in einem maximalen Intervall $J = (t^-, t^+)$ *mit* $-\infty \leq t^- < 0 < t^+ \leq \infty$.
Falls $t^+ = \infty$ *und es existiert eine Folge* $(t_k) \to \infty$ *mit* $\lim y(t_k) = a$, *so wird* $a \in \mathbb{R}^n$ *positiver Limespunkt oder* $\omega-$ *Limespunkt genannt.*
Die Menge aller Limespunkte heißt Limesmenge und wird als L^+ *bezeichnet (analog mit* L^-*). Eine Menge* $M \subset D$ *heißt positiv invariant bzgl. (1.1), wenn aus* $\eta \in M$ *folgt* $\gamma^+(\eta) \subset M$. *Eine invariante Menge ist dadurch gekennzeichnet, dass im Falle wo ein Startwert* η *in M liegt auch die ganze Trajektorie in M liegt. Somit ist eine geschlossene Trajektorie eine invariante Menge.*

Satz 3.1. *Ist K eine kompakte Teilmenge von D und* $y(t)$ *eine Lösung von (1.1) mit* $y^+ \subset K$, *so ist* $t^+ = \infty$ *und die Limesmenge* $L^+ \subset K$ *nicht leer, kompakt, zusammenhängend und (beidseitig) invariant und es gilt:*

$$\lim_{t\to\infty} dist\,(y(t), L^+) = 0$$

Insbesondere existiert jede Lösung $y(t;\eta)$ *mit* $\eta \in L^+$ *in* $\mathbb{R}$.

Beweis:. siehe Walter S. 343 □

Definition 3.1. *Falls die Ruhelage im Ursprung eines autonomen Systems (1.1)* *asymptotisch stabil ist existiert eine Menge*

$$\mathcal{E}(0) = \{\eta \in D : \lim_{t\to\infty} y(t;\eta) = 0\}$$

die als Einzugsbereich $\mathcal{E}(0)$ definiert wird.
Sei $f(0) = 0$ und die Lösung $x(t) \equiv 0$ asymptotisch stabil. Dann ist der Einzugsbereich $\mathcal{E}(0)$ aller $\eta \in D$ mit $y(t;n) \to 0$ für $t \to \infty$ eine Nullumgebung.
Sei $M \subset D$ eine positiv invariante Menge. Dann ist $\mathcal{E}(M)$ die Menge aller Punkte $\eta \in D$ mit dist$(y(t;n), M) \to \infty$.
Ist $\mathcal{E}(M)$ eine Umgebung von M, so wird M Attraktor genannt. Eine einpunktige Menge $M = a$ mit $f(a) = 0$ ist also ein Attraktor, wenn die Lösung $x(t) \equiv a$ asymptotisch stabil ist.

Korollar 3.1. *Es sei $G \subset D$ offen, $V \in C^1(G)$ und $\dot{V} \le 0$ in G. Für ein α aus der Wertemenge $V(G)$ sei die Menge $G_\alpha = \{x \in G : V(x) \le \alpha\}$ kompakt. Dann ist G_α positiv invariant und für $\eta \in G_\alpha$ ist $L^+(\eta) \subset G_\alpha$ nicht leer und $\dot{V} = 0$ auf $L^+(\eta)$.*

Beweis:. Aus $\eta \in G_\alpha$ folgt $V(y(0;\eta) \le \alpha$. Solange $y(t;\eta)$ in G verläuft, $V(y(t;\eta)) \le \alpha$ oder gleichbedeutend $y(t;\eta) \in G_\alpha$. Da G_α vom Rand von G einen positiven Abstand hat existiert die Lösung für alle $t > 0$ und sie bleibt in G_α. Nach Satz 3.1. ist $L^+(\eta) = L^+$ nicht leer und in G_α enthalten. Angenommen für ein $a \in L^+$ gelte $\dot{V}(a) < 0$. Dann ist $\dot{V}(x) \le -\beta < 0$ in einer Kugel $B : |x - a| \le 2\epsilon$. Es gibt eine gegen ∞ strebende Folge (t_k) mit $|y(t_k) - a| < 2\epsilon$ für $t \in J_k = (t_k - c, t_k + c)$ und $k = 1, 2, 3 \ldots$. In jedem Intervall J_k ist $V' \le -\beta$, und hieraus erhält man, da V monoton fallend ist, $V(y(t;\eta)) \to -\infty$ für $t \to \infty$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\dot{V}(a) = 0$ ist. □

Der folgende Satz ist nützlich zur Bestimmung oder Abschätzung des Einzugsbereiches.

Satz 3.2. *Es sei $G \subset D$ offen. Die Funktion $V \in C^1(G)$ habe die Eigenschaft, dass für jedes $\alpha \in V(G)$ die Menge $G_\alpha = \{x \in G : V(x) \le \alpha\}$ kompakt ist, und es gelte $\dot{V} \le 0$ in G. M sei die größte invariante Teilmenge der Menge $N := \{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ und G gehört zum Einzugsbereich von M, für $\eta \in G$ strebt dist $(y(t;\eta), M)$ gegen 0 für $t \to \infty$.*

Beweis:. Die wesentlichen Beweisschritte wurden im Korollar vorweggenommen. Ein Punkt $\eta \in G$ gehört zu G_α mit $\alpha = V(\eta)$. $L^+(\eta) \subset N$ und nach Satz 3.1. ist $L^+(\eta)$ invariant, also $L^+(\eta) \subset M$, und es gilt $0 \leq dist(y(t;\eta)), M) \leq dist(y(t;\eta), L^+) \to 0$ für $t \to \infty$. □

Damit ergibt sich ein verschärfter Satz über asymptotische Stabilität, dessen Grundidee auf LaSalle 1968 zurückgeht.

Satz 3.3. ***Stabiliätssatz von LaSalle***
Die Funktion f mit $f(0) = 0$ sei in D lokal Lipschitz-stetig und $V \in C^1(D)$ sei eine Lyapunov-Funktion zu f. Ist $M = \{0\}$ die größte invariante Untermenge von $N = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil .

Beweis:. Es sei $\bar{B}_r \subset D$ und $V(x) > \gamma > 0$ für $|x| = r(r > 0)$. Dann ist die Menge $G = \{x \in B_r : V(x) < \gamma\}$ eine Nullumgebung mit $\bar{G} \subset B_r$, welche die Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes 3.2. erfüllen. Also folgt die Behauptung.

□

Stabilitätssatz nach LaSalle zeigt insbesondere, dass Lyapunov-Funktionen dazu verwendet werden können, positive Limesmengen zu lokalisieren.

Beispiel 3.1. Nichtlineare Schwingung mit Reibung. Für die Gleichung mit einem linearen Reibungsglied $\epsilon x' (\epsilon > 0)$

$$x'' + \epsilon x' + h(x) = 0 \Leftrightarrow x' = y, y' = -h(x) - \epsilon y$$

$\epsilon(x)$ und $h(x)$ sind Lipschitzstetig mit $|x| < a$, $h(x)$ mit $h(0) = 0, xh(x) > 0$, $x \neq 0$ und $\epsilon(x) > 0$.
zu zeigen: $x = 0$ asymptotisch stabil.
Wir ziehen wie in den vorherigen Beispielen als Lyapunov-Funktion, die Energiefunktion heran: $E(x,y) = V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x h(\varsigma)d\varsigma$. Da $h(0) = 0, xh(x) > 0$ ist V eine positive Funktion, dabei ist $\dot{V} = y(-\epsilon(x)y - h(x)) + h(x)y = -\epsilon(x)y^2 \Rightarrow \dot{V}$ ist eine negative Funktion. $N = \{x : \dot{V} = -\epsilon(x)y^2 = 0\}$ und für $y = 0$ gilt $\dot{V} = 0$. Nehmen wir an wir finden

positive Konstanten a, b, so dass

$$\epsilon(x)y^2 > 0, H(x) < b\,|x| < a, x \neq 0.$$

Dann hat die Menge $G_b = \{x \in G : V(x) \leq b\}$ die in Satz 3.2. beschriebene Eigenschaft, dass aus $\epsilon(x)y^2 > 0$ für $|x| < a$, $x \neq 0$ schließt man, dass $\dot{V} \leq 0$ in G_b. In allen Punkten der y-Achse, außer im Ursprung, gilt für die Steigung, wenn $\dot{x} = 0$ dann ist $\dot{v} = -h(x) \neq 0$ und damit wird die y-Achse verlassen. Somit enthält die y-Achse kein Teilstück der Trajektorie. Die einzige invariante Menge M ist der Ursprung. Damit strebt also jede Lösung die im Innern von G_b beginnt in die Ruhelage. Die Ruhelage ist also asymptotisch stabil.

4 Fazit

Dieser Methode liegt ein reelwertige Lyapunov-Funktion zugrunde, die man als einen verallgemeinerten Abstand vom Nullpunkt ansehen kann. Während die lineare Stabilitätsanalyse nur eine lokale Untersuchung von Attraktoren dynamischer Systeme ermöglicht, stellt das Konzept der Lyapunov–Funktionen einen globaleren Zugang dar. Lyapunov-Funktionen können sowohl für lineare als auch nichtlineare Systeme zum Nachweis von Stabilität verwendet werden. Die wesentliche Eigenschaft von Lyapunov-Funktionen ist, dass diese einen Abstand vom Gleichgewicht definieren, bzgl. dessen die Lösungen gegen das asymtotische oder exponentiell stabile Gleichgewicht konvergieren. Nachteil der Methode besteht darin, daß es kein Rezept zur Konstruktion der Lyapunov-Funktionen gibt.

Literaturverzeichnis

[1] **Aulbach, Bernd**: „Gewöhnliche Differentialgleichungen.“ Berlin, Heidelberg 1997.

[2] **Dilaver, Kamil**: “Analyse der asymptotischen Stabilität nichtlinearer Systeme mit Hilfe des Satzes von Ehlich und Zeller.“ Dissertation, Bergischen Universität Wuppertal. Istanbul 2008.

[3] **Grüne, Oliver**: „Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme.“ 1. Aufl., Wiesbaden 2009.

[4] **La Salle, Joseph; Lefschetz; Solomon**: „Die Stabilitätstheorie von Ljapunow. Die direkte Methode mit Anwendungen.“ Mannheim 1967.

[5] **Walter, Wolfgang**: „Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung.“ 7. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 2000.

[6] **Math24.net**: http://http://math24.net/basic-concepts-of-stability-theory.html/. 2013-05-03.