

Aufgaben zur Wiederholung:

### Aufgabe 60

Betrachte im  $\mathbb{R}^4$  die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die davon aufgespannten Unterräume  $U := \text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$  und  $V := \text{Lin}\{v_1, v_2\}$ .

Bestimme die Unterräume  $U \cap V$  und  $U + V$  jeweils durch Angabe einer Basis.

Versuche, die Aufgabe mit möglichst wenig Rechnung zu lösen.

### Aufgabe 61

Wir betrachten den Körper  $\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Im  $\mathbb{Z}_5^5$  sei folgender Unterraum gegeben:

$$U := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Bestimme die Dimension von  $U$ .
- Stelle  $U$  als Kern einer linearen Abbildung dar.

### Aufgabe 62

Sei  $V := \text{Pol}_3([-1, 1], \mathbb{R})$  der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  vom Grad  $\leq 3$  und  $\mathcal{B}$  das Vektorsystem  $(1, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3)$ . Betrachte die lineare Abbildung  $L$ , die jedem Polynom  $f$  seine Ableitung  $f'$  zuordnet, also

$$\begin{aligned} L : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

- Begründe kurz, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.
- Bestimme die Darstellungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$  von  $L$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .
- Finde eine andere Basis so, dass die Darstellungsmatrix nur Einträge 0 und 1 hat, und möglichst viele Nullen.