

Lineare Algebra I Übungsblatt 14

Abgabe (verlängert) bis **Di** den 02.02.2010, 14:00 Uhr, in die Kästen im Mathe-foyer.

Aufgabe 53

a) Berechne für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, für die $Ax = x$ gilt.

b) Ermittle für $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := e_2$, $v_3 := e_3$ die zur Basis $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ gehörige ON-Basis \mathcal{B}' und bestimme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F_A)$.

c) Was fällt dir an der Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F_A)$ auf? (Vergleiche hierzu auch 2.9.26.) Beschreibe die lineare Abbildung F_A geometrisch.

Aufgabe 54

Wir betrachten \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum und definieren ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{C} durch die Forderung, dass $(1, i)$ eine Orthonormalbasis ist (siehe auch Aufg. 56).

- Zeige, dass die Norm (Länge) bezüglich dieses Skalarproduktes genau der übliche Betrag der komplexen Zahl ist: $\|z\| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Für festes $a = a_1 + a_2i \in \mathbb{C}$ ($a_i \in \mathbb{R}$) ist die Abbildung $\mu_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ eine lineare Abbildung. Bestimme die Darstellungsmatrix von μ_a bezüglich der Basis $(1, i)$.
- Unter welcher Bedingung an a ist μ_a eine orthogonale Abbildung? Erhalten wir so alle orthogonalen Automorphismen von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$?

(Bitte wenden.)

Aufgabe 55

Es sei $M := \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der Vektorraum der reellen 3×3 -Matrizen, also $\dim M = 9$. Wir betrachten auf M das „Standardskalarprodukt“

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}b_{ij}.$$

Setze

$$M_+ := \{A \in M \mid A = A^t\}, \quad M_- := \{A \in M \mid A = -A^t\},$$

die Menge der symmetrischen bzw. „antisymmetrischen“ Matrizen.

Zeige:

- M_+, M_- sind Unterräume und $M = M_+ \oplus M_-$.
- M_- ist das orthogonale Komplement von M_+ (und umgekehrt).

Idee: Aus der Vorlesung wissen wir, dass Bilinearformen auf \mathbb{R}^n (allgemeiner K^n) und quadratische Matrizen der Größe n bei richtiger Interpretation „das gleiche“ sind. Im Folgenden verallgemeinern wir dieses (so gut es geht ...) auf beliebige Vektorräume.

Aufgabe 56

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von \mathbb{R} , weiter S eine beliebige $n \times n$ -Matrix. Zeige:

- Es gibt genau eine Bilinearform

$$b = b_S^{\mathcal{A}} : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

die $b(v_i, v_j) = s_{ij}$ für alle i, j erfüllt.

- $b_S^{\mathcal{A}}$ ist symmetrisch genau dann, wenn S symmetrisch ist.
- Unter welcher Bedingung an S ist $b_S^{\mathcal{A}}$ positiv definit?