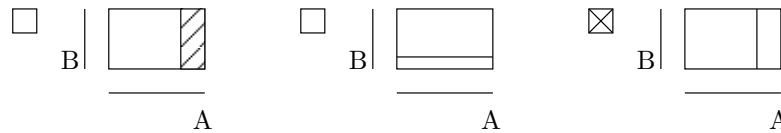


Lineare Algebra I  
 Test am 4.12.2009  
 Antworten und Hinweise

**Aufgabe 1**

- a) Gib  $\mathbb{Q}$  in Mengenschreibweise an. **Antwort:**  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- b)  $A \times B$  werde wie üblich durch ein Rechteck symbolisiert. Wie wäre dann  $\{a\} \times B$  einzuzeichnen?



- c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$  ist

	wahr	falsch
surjektiv, aber nicht injektiv	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
injektiv, aber nicht surjektiv	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
injektiv und surjektiv	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

- d) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann injektiv, wenn gilt

	wahr	falsch
aus $x, x' \in X$ und $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
zu jedem $y \in Y$ gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
zu jedem $x \in X$ gibt es höchstens ein $y \in Y$ mit $f(x) = y$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

- e) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann surjektiv, wenn gilt

	wahr	falsch
für jedes $x \in X$ ist $f(x) \in Y$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
es gibt ein $y \in Y$ , so dass für alle $x \in X$ gilt: $f(x) = y$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
$f^{-1}(Y) = X$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

- f) Wann existiert zu einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine Umkehrabbildung?

**Antwort:** Wenn  $f$  bijektiv ist.

## Aufgabe 2

- Gib die Definition für einen Gruppenhomomorphismus an.
- Gib 4 Beispiele für Gruppen an.
- Wie lauten die Definitionen für Ring und Körper?
- Handelt es sich um Körper?

	Körper	kein Körper
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
$(\mathbb{Z}_{18}, +_{18}, \cdot_{18})$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
$(\mathbb{Z}_{17}, +_{17}, \cdot_{17})$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

## Antworten, Hinweise:

- Eine optimale Antwort sollte den Satz enthalten  
 “Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung ...”.  
 Weitergehen könnte es dann so:  
 “...  $f : G \rightarrow H$ , wobei  $(G, \cdot)$  und  $(H, *)$  Gruppen sind ...”.  
 Man darf nicht nur isolierte Formeln hinschreiben!
- Häufiger Fehler:  $(\mathbb{R}, \cdot)$  ist keine Gruppe, wohl aber  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- Ein Ring ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen  $(R, +, \cdot)$  derart, dass  
 $(R, +)$  eine abelsche Gruppe ist, die Verknüpfung  $\cdot$  assoziativ ist und bezüglich  
 $+$  und  $\cdot$  die beiden Distributivgesetze gelten.  
  
 Ein Körper ist ein kommutativer Ring mit Eins, in dem jedes Element  $\neq 0$   
 ein Inverses bezüglich der Multiplikation besitzt.

## Aufgabe 3

- Handelt es sich bei folgenden Relationen auf  $\mathbb{Z}$  um Äquivalenzrelationen?

	wahr	falsch
$x \sim y \Leftrightarrow x, y \text{ gerade}$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
$x \sim y \Leftrightarrow x + y \text{ gerade}$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ ungerade}$	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

- Gib die Definition der Kongruenz modulo  $m$  auf  $\mathbb{Z}$  an.

**Antwort:**  $a \equiv_m b \Leftrightarrow m \mid b - a$

Die Aussage  $a \equiv_m b \Leftrightarrow a \bmod m = b \bmod m$  wäre auch eine korrekte Äquivalenz, war aber bei uns nicht die Definition, sondern ein Satz.

c) Was ist der Unterschied zwischen  $\mathbb{Z}_m$  und  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ?

**Antwort:**  $\mathbb{Z}_m$  besteht aus Zahlen (Elementen von  $\mathbb{Z}$ ),  
 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  besteht aus Mengen (den Restklassen).

d) Gib 2 verschiedene Repräsentantensysteme für  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  an.

**Antwort:** (Beispiel)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

e) Wie sehen die Äquivalenzklassen der 1 und  $-2$  in  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  aus?

**Antwort:**  $[1]_{12} = \{\dots, -23, -11, 1, 13, 25, \dots\}$ ,  
 $[-2]_{12} = \{\dots, -26, -14, -2, 10, 22, \dots\}$

#### Aufgabe 4

a) Welche der folgenden Aussagen ist keines der Vektorraumaxiome:

- Für alle  $x, y \in V$  gilt  $x + y = y + x$
- Für alle  $x, y, z \in V$  gilt  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Für alle  $x, y, z \in V$  gilt  $(xy)z = x(yz)$

b) Die Skalarmultiplikation in einem  $K$ -Vektorraum ist eine Abbildung

- $V \times V \rightarrow K$       $K \times V \rightarrow V$       $K \times K \rightarrow K$

c) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Wenn  $V$  ein  $K$ -Vektorraum ist, dann ist

- $\{x + y \mid x, y \in V\} = V$
- $\{x + y \mid x, y \in V\} = V \times V$
- $\{\alpha x \mid \alpha \in K, x \in V\} = K \times V$

d) Welche der folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ist ein Untervektorraum

- $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$
- $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_n^2\}$
- $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$