18.12.2009

Lineare Algebra: Beispiel zu Satz 2.6.4:

Matrix-Inversion

$A \in K^{n \times n}$ mit Rang$(A) = n$ durch elementare Umformungen auf E_n bringen (nicht nur obere Dreiecksgestalt). Die gleichen Umformungen auf E_n liefert X mit $AX = E_n$.

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \frac{1}{2} \quad -1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdot \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \\
0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \cdot \frac{3}{4} \quad -\frac{2}{3} \quad +\frac{1}{3} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \\
\hline
\end{array}
$$

Ergebnis: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Probe!

Bem. 1: den gemeinsamen Nenner $\frac{1}{4}$ kann man mit der Determinante erklären

Bem. 2: allgemein gilt: A symmetrisch $\Rightarrow A^{-1}$ symm.