Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Ina Voigt

WS 2007/08

# Übungen zur Vorlesung Algebra II
## Blatt 3

**Aufgabe 9.** Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung 12.

Hinweis: es gibt 5 Stück

**Aufgabe 10.*** Klassifizieren Sie, aufbauend auf Aufgabe 1 von Blatt 1, alle Gruppen der Ordnung 24.
Hinweis: zu bestimmen sind noch die semidirekten Produkte. Es gibt insgesamt 15 Gruppen.

Achtung: Der Beweis wurde von uns nicht komplett "probegerechnet" und ist recht länglich, sprengt also den Rahmen einer normalen Übungsaufgabe. Diese Aufgabe ist reizvoll, aber nicht vorrangig zu bearbeiten.

**Aufgabe 11.** Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung $|G| \leq 27$ auflösbar sind.

**Aufgabe 12.** Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 30 nicht einfach ist.
Hinweis: Betrachten Sie –wie schon in anderen Fällen– als Kandidaten für Normalteiler die $p$-Sylowgruppen, und führen Sie die Annahme, dass unter diesen kein Normalteiler ist zu einem Widerspruch der Art $n_2 + n_3 + n_5 \geq 30$, wobei $n_p$ die Anzahl der Elemente der Ordnung $p$ in der Gruppe bezeichne.

Wer Anwendungen der Sylowsätze wie in den Aufgabe 10 und 11 nicht mehr als Herausforderung ansieht, bekommt hier noch eine Alternative:

**alternative Aufgabe 11 oder 12.** Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe $G$ einen größten auflösbaren Normalteiler enthält, also:
$N \trianglelefteq G$, $N$ auflösbar und $M \trianglelefteq G$, $M$auflösbar $\implies M \subseteq N$.
Idee: es gibt sicher maximale auflösbare Normalteiler. Was wäre, wenn es davon zwei verschiedene gäbe?

**Abgabetermin:** Montag, der 05.11.07, 12:00 Uhr, Kasten Nr. 101