

# Kombinatorische und geometrische Gruppentheorie

## Übungsblatt 12

### Aufgabe 1

Sei  $G = \langle S; R \rangle$ ,  $S$  zulässig, endlich präsentiert. Durch die Linksmultiplikation  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto xg$ , wird eine Operation auf dem Cayley-Graphen  $\Phi(\Gamma, S)$  von  $(\Gamma, S)$  definiert. Zeigen Sie:

- a) Diese Operation ist frei und eigentlich.
- b) Die Gruppenelemente operieren als Isometrien.

### Aufgabe 2

Ist der Cayley-Graph  $\Phi(\Gamma, S)$  von  $(\Gamma, S)$  ein metrischer Baum, so ist  $\Gamma$  freie Gruppe.

### Aufgabe 3

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  eine Gruppe von endlichem Typ und  $S$  eine zulässiges Erzeugendensystem von  $\Gamma$ . Der Rips-Komplex  $P_n(\Gamma, S)$  ist der Simplicialkomplex, dessen Ecken die Elemente von  $\Gamma$  und dessen  $k$ -Simplizes die (ungeordneten)  $(k+1)$ -Tupel der Form  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$  sind, wobei  $k \geq 1$ , die  $\gamma_i \in \Gamma$ ,  $\gamma_i \neq \gamma_j$  für  $i \neq j$  und  $d_S(\gamma_i, \gamma_j) \leq n$  für alle  $i, j$ . Wir versehen  $P_n(\Gamma, S)$  mit der schwachen Topologie, d.h.  $A \subset P_n(\Gamma, S)$  ist abgeschlossen genau dann, wenn  $A \cap S$  abgeschlossen ist in  $S$  für jeden geschlossenen Simplex  $S$  aus  $P_n(\Gamma, S)$ . Zeigen Sie:

- a)  $P_1(\Gamma, S)^{(1)}$ , das 1-Gerüst von  $P_1(\Gamma, S)$ , ist gleich dem Cayley-Graph von  $(\Gamma, S)$ .
- b)  $\Gamma$  operiert in natürlicher Weise auf  $P_n(\Gamma, S)$  mit folgenden Eigenschaften:
  - i) Die Operation ist treu, d.h.  $\Gamma$  operiert als Gruppe von Permutationen auf  $P_n(\Gamma, S)$ .
  - ii) Der Stabilisator jedes Simplexes ist endlich.
  - iii) Die Operation ist eigentlich.
  - iv)  $P_n(\Gamma, S)/\Gamma$  ist kompakt.
  - v) Ist  $\Gamma$  torsionsfrei, so ist die Operation frei, d.h. fixiert  $\gamma \in \Gamma$  einen Simplex von  $P_n(\Gamma, S)$ , so ist  $\gamma = 1$ .