Prof. Dr. G. Rosenberger
Dipl.-Math. T. Camps

Ausgabe: 17.10.2006
Abgabe: 24.10.2006, 12.00 Uhr

Kombinatorische und geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $G := \langle A, B \rangle$. G operiert auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als Gruppe linearer Transformationen durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $A^n(\mathbb{R}_-) \subset \mathbb{R}_+$ für alle $n \in \mathbb{Z}^*$.

b) $B^n(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_-$ für alle $n \in \mathbb{Z}^*$.

c) Ist $w = A^{n_1}B^{m_1} \cdots A^{n_k}B^{m_k}A^{n_{k+1}}$, alle $n_i, m_j \neq 0$ und $z \in \mathbb{R}_-$, so ist $w(z) \in \mathbb{R}_+$, also insbesondere $w \neq 1$.

d) G ist freie Gruppe vom Rang 2.

Aufgabe 2

Sei F eine freie Gruppe und $a, b, c \in F$. Zeigen Sie:

a) Sind a, b beide keine echten Potenzen in F und ist $a^r = b^s$ mit $r, s \in \mathbb{N}$, so ist $r = s$ und $a = b$.

b) Sind a, b, c alle ungleich 1 und gilt $[a, b] = 1$, $[b, c] = 1$, so folgt $[a, c] = 1$, das heißt F ist kommutativ transitiv.

Aufgabe 3

a) Seien $u = xy$, $v = yx$, $w_i = x^i y^i$ Elemente von $F(\{x, y\})$. Zeigen Sie:

   i) $\langle u, v \rangle \cong F(\{x, y\})$

   ii) $\langle \{w_i | i \in \mathbb{N}\} \rangle \cong F(\mathbb{N})$.

b) $F(x_1, \ldots, x_n)$ sei die von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ frei erzeugte Gruppe.
Zeigen Sie: Die Untergruppe $\langle x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n} \rangle$ mit $k_i \neq 0$ und $k_1 \neq \pm 1$ ist echt enthalten in $F(x_1, \ldots, x_n)$, jedoch isomorph zu $F(x_1, \ldots, x_n)$.