Webversion des Beitrags Prediger, Susanne (2018). Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat: Am Beispiel Auffalten und Verdichten mathematischer Strukturen. In Fachgruppe für Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 33-40). Münster: WTM. (Verschriftlichter Hauptvortrag)

Susanne PREDIGER, Dortmund

Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat: Am Beispiel Auffalten und Verdichten mathematischer Strukturen

1. Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat

Design-Research ist ein Forschungsformat von wachsender Bedeutung in den Fachdidaktiken und anderen Bildungswissenschaften (teilweise synonym genannt Design-based research, Entwicklungsforschung). Es kombiniert zwei Ziele, die früher als kontrovers, heute jedoch als komplementär verstanden werden: (1) Gestaltung von Lehr-Lehr-Arrangements und damit Weiterentwicklung der Unterrichtspraxis und (2) Gewinnung von tiefen empirischen Einsichten in Lehr-Lernprozesse zum Zwecke der didaktischen Theoriebildung. Seit Wittmanns (1992) Plädoyer für „Mathematikdidaktik als Design Science“ wurde das Design von Lehr-Lern-Arrangements zunehmend als Aufgabe der wissenschaftlichen Disziplin anerkannt, insbesondere wenn es forschungsbasierte Erkenntnisse über Lernstände und Lehr-Lernprozesse einbezieht. Diese Erkenntnisse über gegenstandsbezogene Lehr-Lernprozesse werden u.a. in design-basierter Forschung in Design-Experimenten generiert (Brown 1992). 25 Jahre nach diesen frühen Arbeiten hat sich das Forschungsformat in verschiedenen Varianten etabliert und durch theoretische Fundierung und Festlegung von Qualitätskriterien konsolidiert (Bakker & van Eerde 2015; Prediger, Gravemeijer & Confrey 2015).

Hier wird ein spezifisch fachdidaktisches Modell von Design-Research genutzt, die gegenstandsspezifische, lernprozessfokussierende Entwicklungsforschung (Hußmann et al. 2013). In ihr wird die Spezifizierung des Lerngegenstands zunächst ausgehend von Literaturüberblicken, in den weiteren Zyklen dann auch empirische Aufgabe begriffen. Das Modell (vgl. Abb. 1) umfasst vier Arbeitsbereiche, die iterativ aufeinander bezogen werden: (a) Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands, (Weiter-)Entwicklung des Designs, (c) Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten, und (d)

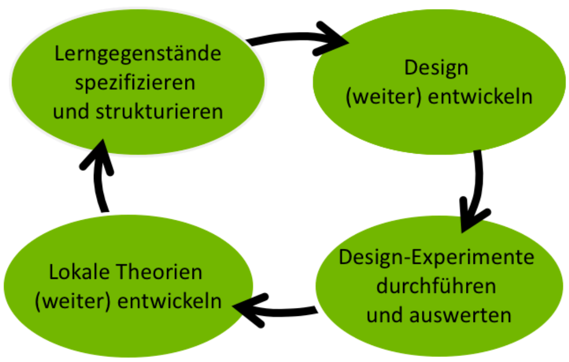

Abb. 1: Arbeitsbereiche von Design-Research im Funken-Modell (Hußmann et al. 2013)

Entwicklung von Beiträgen zur lokalen Theoriebildung.

Dieser Beitrag skizziert Vorgehen und Ergebnisse des Forschungsformats an dem Design-Research-Projekt MuM-Beweisen zur Frage „Wie können Schülerinnen und Schüler logische Strukturen des Beweisens lernen?“ (Prediger & Hein 2017). Es nutzt dabei in den gefundenen Phänomenen und Mustern Analogien zu zwei anderen Design-Research-Projekten, die ebenfalls das Lernen mathematischer Strukturen adressieren, allerdings begrifflich-relationaler statt logischer Strukturen in einem Projekt zum Konzept der Prozente (Pöhler & Prediger 2015, Pöhler 2018) und zum Konzept der funktionalen Abhängigkeit (Prediger & Zindel 2017, Zindel 2018).

2. Lerngegenstand logische Strukturen spezifizieren

Die Spezifizierung des Lerngegenstands logische Strukturen von Beweisen erfolgt zunächst durch literaturgestützte Aufarbeitung des Forschungsstands (Überblick in Hanna & de Villiers 2012). Darin zeigt sich, dass das Erfassen logischer Strukturen ein zentraler Bestandteil (unter mehreren) des formalen Beweisens ist, für den zahlreiche herausfordernde Aspekte empirisch identifiziert wurden (vgl. Abb. 2).

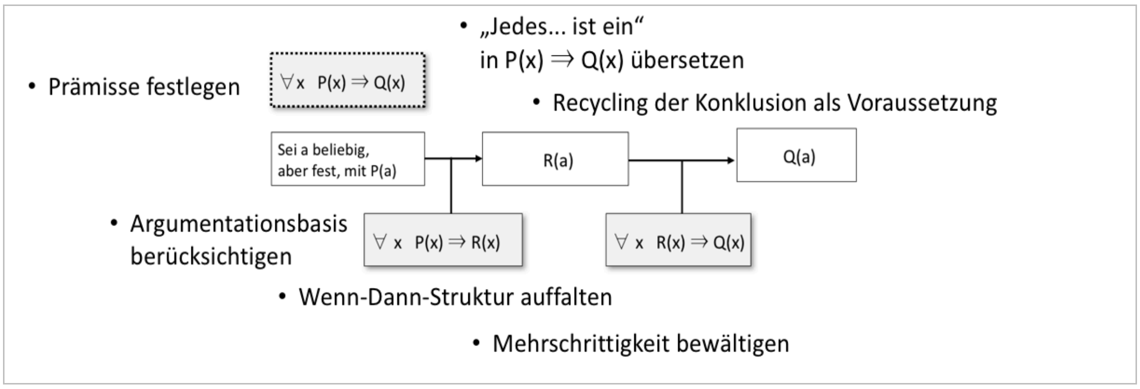

Abb. 2: Spezifizierung des Lerngegenstands: Aspekte der logischen Struktur von Beweisen

Das Erfassen und Nutzung logischer Strukturen erfordert zum Beispiel, in prädikativ formulierte Sätze eine Wenn-Dann-Struktur logischer Implikationen hineinzusehen (Selden & Selden 1995, vgl. Beispiel in Abb. 3), auch wenn diese nicht sichtbar ist.

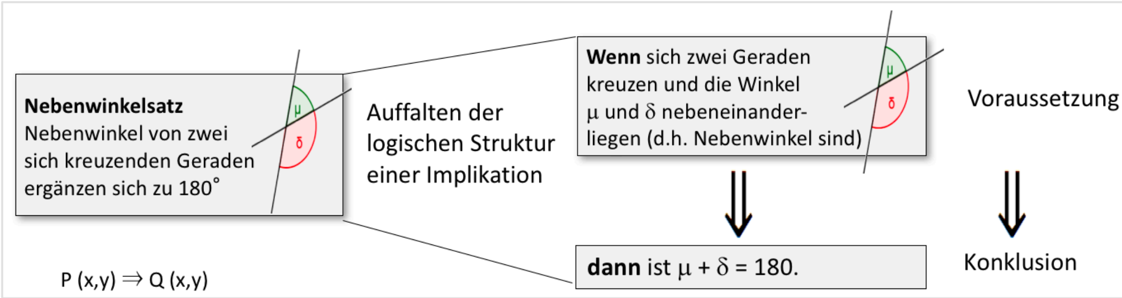

Abb. 3: Notwendiges Auffalten der logischen Struktur einer Implikation

Auch in anderen Kontexten erweist sich das Hineinsehen mathematischer Strukturen aus epistemologischer Perspektive als eine zentrale Denkhandlung zur Strukturierung komplexer Situationen (Schwarzkopf 2007), die allerdings denjenigen vorbehalten bleibt, die die Strukturen schon gut verinnerlicht haben. Dabei erweist sich der relationale Charakter vieler mathematischer Konzepte als sowohl kognitiv als auch sprachlich besonders herausfordernd (Steinbring 2005, Prediger 2013).

Es stellt sich daher die Frage, wie Strukturen sichtbar gemacht werden können, jedoch ohne die in Abb. 2 angedeutete prädikatenlogische oder andere formale und symbolische Sprache zu nutzen. Diese ist zwar für die Kommunikation unter Fachleuten hoch effizient, weil sie präzise und hochverdichtet ist, steht jedoch Schülerinnen und Schülern der Klasse 8-12 nicht zur Verfügung.

3. Design entwickeln und in Design-Experimenten erproben

Um Lernende zu befähigen, die Herausforderungen im Erfassen mathematischer (hier: logischer) Strukturen auch ohne formale Sprache zu bewältigen, muss die hoch verdichtete mathematische Struktur im Sinne Aeblis (1981) wieder aufgefaltet, also in ihre einzelnen (Verstehens-)Elemente aufgegliedert werden. Dazu wurden im Design des Lehr-Lern-Arrangements zum logischen Beweisen zwei Design-Prinzipien angewandt, die in der Mathematikdidaktik bislang vor allem in Bezug auf Anschauungsmittel der Grundschuldidaktik systematisch untersucht sind (Lorenz 1992, dort mit anderen Begrifflichkeiten):

(DP1) Visualisieren zum Explizieren der Struktur

(DP2) Strukturelles Scaffolding, um Denkprozesse zu kanalisieren

Während DP1 vorrangig auf Veranschaulichen als Tätigkeit der Lehrkraft zielt, adressiert DP2

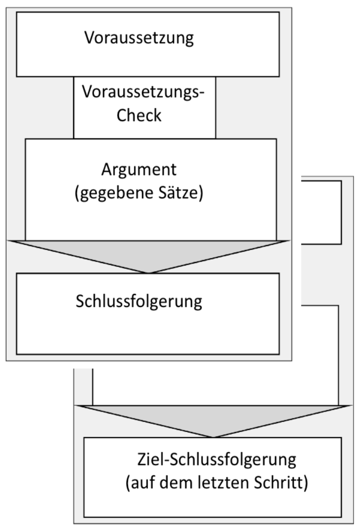

Abb. 4: Materialisierte Argumentationsstruktur als Designelement

die aktiven Tätigkeiten der Lernenden, die durch Arbeitsmittel kanalisiert werden. Es knüpft an lernpsychologische Prinzipien des Scaffolding an (Scaffold = Gerüst, lernpsychologisch aufgeblättert in Hannafin, Land & Oliver 1999) und wurde auch in anderen Design-Research-Projekten fruchtbar gemacht (z.B. in Pöhler & Prediger 2015 mit dem Prozentstreifen als Anschauungs-, Kommunikations-, Denk- und Problemlösemittel). Im hier vorzustellenden Projekt zum Beweisen werden die Designprinzipien realisiert mithilfe des Designelements der sogenannten materialisierten Argumentationsstruktur, die zur Visualisierung und als Scaffold (= Gerüst) gleichermaßen dient (vgl. Abb. 4 und Hein, in diesem Band).

Das Lehr-Lern-Arrangement wurde in 5 Designexperiment-Zyklen mit insgesamt 48 Lernenden und einer ganzen Klasse 8 erprobt, zunächst in Paarsettings, dann in Kleingruppensettings und schließlich im Klassensetting, um zunächst die strukturellen und sprachlichen Lernwege und Hürden zu identifizieren und danach die Dynamik des Regelunterrichts einzubeziehen (Prediger & Hein 2017).

4. Sprachlichen Lerngegenstand empirisch spezifizieren: Sprachmittel zum Auffalten von Verdichtetem

Die qualitativen Analysen der durch das Lehr-Lern-Arrangement initiierten und videographierten Beweisprozesse wurden mithilfe eines adaptierten Toulmin-Schemas durchgeführt (dokumentiert in Prediger & Hein 2017). Sie zeigen, dass Lernende mithilfe der materialisierten Argumentationsstruktur logische Strukturen von Beweisen zunehmend explizieren können, indem sie handelndes Strukturieren der Argumente ermöglichen und die Vervollständigung unvollständiger Argumentationen unterstützen.

Gleichwohl zeigen die Analysen der ersten Zyklen auch eine wichtige Grenze: Viele Lernenden können die materialisierte Argumentationsstruktur zwar füllen und damit Beweise angemessen strukturieren, sie tendieren allerdings dazu, die logischen Bezüge zwischen den einzelnen Bestandteilen der materialisierten Argumentationsstruktur nur sehr wenig zu versprachlichen. Die Dominanz des Umgangs mit dem Material führt stattdessen zu einer eher deiktisch oder graphisch angelegten Meta-Sprache: „und dann in dem Feld … und dann in dem Feld das Argument...“. Beim Auffalten der logischen Struktur mithilfe der materialisierten Argumentationsstruktur scheint vielen Lernenden also diejenigen Sprachmittel zu fehlen, mit denen man die logischen Bezüge auch sprachlich realisieren kann. Diese betreffen kausale, konditionale und konsekutive Konnektoren, die die rein sequenzierenden Konnektoren einer Vorgehens-Erläuterung ersetzen müssen (Hein in diesem Band).

Hier zeigt sich ein Phänomen, das analog bereits in anderen Projekten aufgetaucht war (z.B. Prediger & Zindel 2017, Pöhler & Prediger 2015):

- Logische Strukturen sind ebenso wie begriffliche Strukturen (beim Konzept funktionale Abhängigkeit oder beim Teil-Ganzes-Konzept) unsichtbar und durch ihren relationalen Charakter nur durch Sprache oder Visualisierungen greifbar (Prediger 2013, Steinbring 2005), wobei auch die Visualisierungen bereits hohe Verdichtungen aufweisen (Zindel 2018).
- Die formale Fachsprache, mit der die mathematischen Strukturen üblicherweise adressiert werden, weist in der Regel ebenfalls eine extrem hohe Verdichtung auf, ist daher meist syntaktisch relativ einfach und daher für die Kommunikation unter Fachleuten ebenso hoch effizient wie als Werkzeug des Denkens (in der kognitiven Funktion von Sprache).
- Dagegen müssen Lernende, die sich in diese Strukturen und Sprachmittel erst hineindenken, sie zu ihrer Bedeutungskonstruktion erst auffalten. Dafür sind im Mathematikunterricht die eigensprachlichen Ressourcen vieler Lernender oft nicht ausreichend, stattdessen sind komplexere Sprachmittel erforderlich, die nicht auf den ersten Blick zur formalen Fachsprache gehören, sondern meist dem (linguistisch nach wie vor unterbestimmten) bildungssprachlichen Register zugeschrieben werden.
- Über diese Sprachmittel verfügen nur wenige Lernende bereits durch familiäre bildungssprachliche Lerngelegenheiten, für die anderen muss der Unterricht erst Lerngelegenheiten bereitstellen (Snow & Uccelli 2009). Diese oft übersehenen Sprachmittel zu identifizieren, gehört zur *empirischen Aufgabe der Spezifizierung bildungssprachlicher Anforderungen durch Analyse von mathematischen Lernprozessen* (Prediger & Zindel 2017).

	Verdichteter Zugriff	**Aufgefaltete Erklärung**
Begriffliche Struktur eines **Funktionalen Zusammenhangs** (Prediger & Zindel 2017)	f: Geschwindigkeit $\rightarrow$ Benzinverbrauch Benzinbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	Der Benzinverbrauch *hängt von* der Geschwindigkeit *ab*, d.h. *wenn* man die Geschwindigkeit kennt, *dann* kann man daraus den Benzinverbrauch bestimmen.
Begriffliche Struktur des **Prozent-Konzepts** (Pöhler & Prediger 2015)	Anteil = $\frac{□□□□□□□□□□□}{□□□□□□□□□}$ Anteil als Quotient von Prozentwert und Grundwert	Prozente, das sind ja einfach *Anteile* in Hundertstel, damit beschreibt man den *Teil von einem Ganzen*. Man muss immer fragen, von welchem Ganzen.

Logische Struktur des Bezugs einer Implika- tion auf einen Fall (Prediger & Hein 2017)	$P(a) \quad \underline{P(x) \Rightarrow Q(x)}$ $Q(a)$ Die Voraussetzung der Implikation wird auf den Fall a bezogen.	Das Argument PQ *besagt für alle x, wenn* P gilt, *dann* gilt auch Q. Weil die *Voraussetzung P für a erfüllt ist*, kann man den Wenn-Dann-Satz anwenden. *Daraus folgt nach dem Argument* PQ auch Q(a).

Abb. 5 Auffalten von verdichteten Strukturen – kognitive und sprachliche Herausforderung

Abbildung 5 gibt Beispiele aus drei Bereichen, und zwar dem der logischen Strukturen, der begrifflich-relationale Strukturen bei funktionaler Abhängigkeit und dem Prozent-Konzept als Teil-Ganzes-Struktur. Die jeweils kursiv gedruckten Sprachmittel der aufgefalteten Erklärungen sind diejenigen, die sich in den empirischen Analysen als nicht für alle Lernende verfügbar herausgestellt haben.

5. Konsequenzen fürs Design

Als Konsequenz dieser Analysen wurden die spezifizierten sprachlichen Anforderungen expliziter zum Lerngegenstand gemacht, und deren Erlernen durch folgende Designprinzipien unterstützt:

(DP3) Sprache immer wieder einfordern

(DP4) Sprache unterstützen und sukzessive aufbauen

Zum DP3 wurden im Projekt MuM-Beweisen als Design-Elemente die mündlichen Impulse und Nachfragen sowie die schriftlichen Schreibaufträge herangezogen, um diskursiv reichhaltigere Anforderungen mit den Materialhandlungen zu kombinieren.

Zum DP4 diente in den Kleingruppensettings das mündliche Sprachvorbild der Lehrkraft, von deren Formulierungen die Lernenden empirisch nachweislich viele Satzbausteine übernahmen, wie eine Spurenanalyse zeigte. Im Klassenunterricht des Zyklus 5 wurde die Sprachunterstützung zudem durch einem Sprachspeicher (Abb. 6) gestärkt, denn die mündlichen Unterstützungen bewähren sich vor allem in Kleingruppenmoderationen.

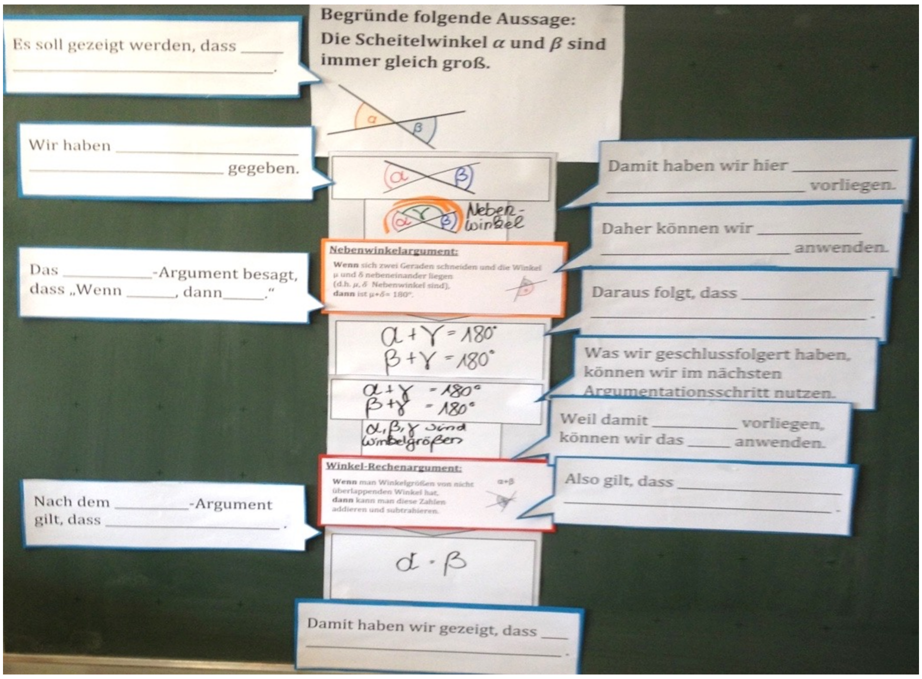

Abb. 6: Sprachspeicher für die Satzbausteine für logische Bezüge im Klassenunterricht des Zyklus 5

Inwiefern die Schülerinnen und Schüler des Klassenunterrichts sich die angebotenen Satzbausteine zu eigen machen konnten, wird in den noch andauernden Analysen genauer zu untersuchen sein.

6. Fazit: Forschungs- und Entwicklungsprodukte

Mathematische Strukturen sind anspruchsvoll zu lernen, weil sie abstrakt und unsichtbar sind und meist in hoch verdichteter Weise kommuniziert werden. Mithilfe verschiedener Entwicklungsforschungsprojekte kann der Zusammenhang zwischen Denken und Sprechen über Strukturen genauer verstanden werden. Dabei erweist sich das Auffalten und Verdichten als zentrale Denk- und Lernhandlungen, die für Fachleute selbstverständlich und flexibel kombiniert werden, für Lernende jedoch hohe mentale und sprachliche Anforderungen stellen.

Vier Designprinzipien wurden formuliert, um die Strukturen und die zugehörige Sprache besser zugänglich zu machen. Die zugehörigen Designelemente zu ihrer Realisierung umfassen neben der materialisierten Argumentationsstruktur insbesondere einen Sprachspeicher, um die sprachlichen Lerngegenstände zu explizieren. Die qualitativen Analysen geben Hinweise, dass die Lernenden mit ihrer Hilfe zunächst die Auffaltungen verstehen und damit dann die verdichtetere formalbezogene Fachsprache zu mathematischen Strukturen mit Bedeutung füllen können. Da bei vielen sprachlich Schwachen fürs Auffalten die (bildungs-) sprachlichen Ressourcen nicht ausreichen, muss Sprachbildung im Fach genau daran ansetzen, nicht allein an der schon verdichteten Fachsprache.

Die Analogien zwischen den Projekten MuM-Beweisen, MuM-Funktionen und MuM-Prozente zeigen, dass didaktische Phänomene und Muster zwar zunächst für jeden einzelnen Lerngegenstand herausgearbeitet werden müssen, sie jedoch dann auch in weiteren Fällen analog wieder zu finden sind. So kann eine gegenstandsbezogene Forschung zunehmend auch gegenstandsübergreifende Erkenntnisse liefern.

Dank. Ich danke meiner Doktorandin Kerstin Hein, die das hier beschriebene Projekt MuM-Beweisen so engagiert und kompetent mit mir durchführt.

Literatur

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Bakker, A. & van Eerde, D. (2015). An introduction to Design-Based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (S. 429-466). Dordrecht: Springer.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

Hannafin, M., Land, S., & Oliver, K. (1999). Open Learning Environments: Foundations, Methods, and Models. In C. M. Reigeluth (Hrsg.), *Instructional-Design Theories and Models* (Bd. 2, S. 115-140). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Hein, K. (2018, i.Dr.): Deduktives Schließen lernen in Klasse 8–12. In P. Bender (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM. (in diesem Band).

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign* (S. 19-36). Münster: Waxmann.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Göttingen: Hogrefe.

Pöhler, B. & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories. *Eurasia Journ. of Math., Science & Technology Education, 11*(6), 1697-1722.

Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozenten - Eine Entwicklungsforschungsstudie.* Dissertation. Wiesbaden: Springer.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach* (S. 167-183). Münster: Waxmann.

Prediger, S., & Hein, K. (2017). Learning to meet language demands in multi-step mathematical argumentations. *European Journal of Applied Linguistics, 5*(2), 309-335.

Prediger, S. & Zindel, C. (2017). School academic language demands for understanding functional relationships. *Eurasia Journ. of Math., Sci. & Tech. Ed., 13*(7b), 4157-4188.

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes. *ZDM - Mathematics Education, 47*(6), 877-891.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementary Modelling in Mathematics Lessons: The Interplay between „Real–World" Knowledge and „Mathematical Structures". In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (S. 209-216). Dordrecht: Springer.

Selden, J. & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123–151.

Snow, C. E. & Uccelli, P. (2009). The Challenge of Academic Language. In D. R. Olson & N. Torrance (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Literacy* (S. 112-133). Cambridge: Cambridge University Press.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective*. Berlin: Springer.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als "design science". *Journal für Mathematik-Didaktik, 13*(1), 55-70.

Zindel, C. (2018). *Den Funktionsbegriff im Kern verstehen – Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung*. Dissertation, TU Dortmund.