Vorversion eines Beitrags, 2013 erschienen in Michael Becker-Mrotzek, Karen Schramm, Eike Thürmann & Helmut Johannes Vollmer (Hrsg.): Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen. Waxmann, Münster u.a., 167-183.

Susanne Prediger

Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten

1. Zur Einordnung

1.1 Drei Rollen der Sprache als Lerngegenstand, Lernmedium und Lernvoraussetzung in der mathematikdidaktischen Forschung und Entwicklung

Entgegen der Einschätzung von Vollmer und Thürmann (2010, S. 129), dass den Fachdidaktiken und der Schulpraxis „noch überwiegend Sensibilität für die Sprachlichkeit von Fachlernen und für die Strukturen und Elemente der Schulsprache fehlen“, beschäftigt sich die Mathematikdidaktik seit ihrer Entstehung mit sprachlichen und kommunikativen Aspekten des Mathematiklernens als Lerngegenstand, Lernmedium und Lernvoraussetzung (Überblicke in Pimm, 1987; Ellerton & Clarkson, 1996; Maier & Schweiger, 1999). Dabei erweiterte sich der Fokus im Laufe der Jahre:

(Fach-)Sprache als Lerngegenstand

Als zentrale *Lerngegenstände* waren zunächst vorrangig die Fachbegriffe im Blick mathematikdidaktischer Forschung und Entwicklung (Wittenberg, 1957; Freudenthal, 1983 u.v.m.), und nach der Wortebene zunehmend auch die Satzebene und die Text- bzw. Diskursebene (z.B. Maier & Schweiger 1999; Pimm 1987).

In epistemologischen, stoffdidaktischen und empirischen Analysen wurden zunächst *deskriptiv* für Wort-, Satz und Textebene fachspezifische Charakteristika, typische Hürden und mögliche Erwerbswege herausgearbeitet. Am intensivsten wurden dabei Begriffsbildungsprozesse untersucht, insbesondere auch in ihren spezifischen Ausformungen für einzelne mathematische Begriffe (Freudenthal, 1983; Steinbring, 2005). *Konstruktiv* entstanden im Zuge dieser Auseinandersetzung zahlreiche unterrichtliche Konzeptionen und Designs von Lehr-Lernarrangements für erfolgreiches Begriffsbilden (z.B. Winter, 1983) sowie Ansätze für (Fach-)Sprachenlernen auf Satz- und Textebene (z.B. Maier & Schweiger, 1999).

Spätestens seit der Verankerung prozessbezogener Kompetenzen in den Bildungsstandards (KMK, 2003) wurden auch die (von Winter 1975 als allgemeine Lernziele thematisierten) Diskursfunktionen Argumentieren, Erklären und Darstellen als verbindliche Lerngegenstände begriffen und durch darauf fokussierte Lehr-Lernarrangements gefördert. Zunehmend wird diese *konstruktive* Entwicklungsarbeit durch *empirische* Untersuchungen der Herausforderungen und Fördermöglichkeiten für Diskursfunktionen abgestützt (z.B. Link, 2012).

(Unterrichts- und Alltags-)Sprache als Lernmedium

Auch als Lernmedium wurde Sprache in der Mathematikdidaktik breit beforscht. Dafür wurden Schulbücher und Aufgabentexte ebenso analysiert (Maier & Schweiger, 1999) wie unterrichtliche Kommunikation in Klassengesprächen (Voigt, 1984, Bauersfeld, 1983) und Gruppenarbeiten (Götze, 2007; Krummheuer, 1985) sowie Schreibprozesse von Lernenden (z.B. Fetzer, 2007).

Diese *deskriptiven* Analysen beeinflussten das Design von Lehr-Lernarrangements zur Anregung mündlicher informeller Sprachproduktion (z.B. Barzel, Büchter & Leuders, 2007; Fröhlich & Prediger, 2008), zur gezielten mündlichen und schriftlichen Fachsprachennutzung und -reflexion (Maier & Schweiger, 1999; Prediger & Vernay, 2005) und zur Anregung informellen und fachsprachlichen Schreibens (Gallin & Ruf, 1990; Morgan, 2001; Kuntze & Prediger, 2005; u.v.m). Die Erprobung bzw. systematische Beforschung solcher Lehr-Lernarrangements (z.B. van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Prediger 2010) zeigte insbesondere, wie die Nutzung der Alltagssprache einen Schlüssel zum Verstehen mathematischer Konzepte liefern kann, gemäß Wagenscheins Idee von der „Sprache des Verstehens“ (1968, S. 122).

Obwohl es also theoretisch fundierte und praktisch erprobte Ansätze zur forcierten Nutzung von Sprache als Lernmedium gibt, zeigen Videostudien gleichwohl den begrenzten *Umsetzungsgrad* in der alltäglichen Unterrichtspraxis (Begehr, 2004; Hiebert et al., 2003).

(Bildungs- und Fach-)Sprache als Lernvoraussetzung und potentielles Lernhindernis

Gerade durch die wichtige Rolle der Sprache als Lernmedium ist die Beherrschung der Unterrichtssprache immer auch schon *Lernvoraussetzung*, um sich angemessen beteiligen zu können. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik entsteht erst langsam ein Problembewusstsein dafür, dass Sprache auch zum *Lernhindernis* werden kann, wenn Lernende (mit Deutsch als Zweit- oder auch Erstsprache) diese vorausgesetzten Anforderungen an Sprachproduktion und –rezeption in der Unterrichtssprache nur partiell erfüllen und dadurch nur eingeschränkten Zugang zur Mathematik finden (zusammenfassend dokumentiert in Barwell, 2009 und Prediger & Özdil, 2011).

Aus dieser dritten Rolle der Sprache als zu schaffende Lernvoraussetzung gewinnt die Forderung nach durchgängiger Sprachförderung in allen Fächern (MSWWF, 1999; Ahrenholz, 2010) aktuell ihren Nachdruck. Dabei gilt es gerade bezüglich bildungssprachlicher Lernvoraussetzungen, auch spezifische herkunftsbedingte Benachteiligungen auszugleichen (Cummins, 1986; Gogolin, 2006).

Der kompensatorische Fokus auf zu schaffende Lernvoraussetzungen ist wichtig, aber nicht erschöpfend, denn ein sprachsensibler Unterricht kann neben seiner Kompensationsfunktion auch unabhängig vom Sprachstand substantiell zum fachlichen Lernen beitragen (Maier & Schweiger, 1999; Leisen, 2010). Dies gilt insbesondere, wenn nicht nur die Rolle der Sprache als Lernhindernis aufgriffen, sondern sie gleichzeitig auch adressiert wird als Lerngegenstand und gezielt eingesetztes und immer wieder reflektiertes Lernmedium (einen Überblick über praktische Ansätze geben Meyer & Prediger, 2012). Für die Umsetzung solcher Konzeptionen sind allerdings intensive weitere fachspezifische Forschungen und Entwicklungen notwendig. Einen kleinen Beitrag dazu leistet seit 2009 das Dortmunder MuM-Projekt (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit), aus dem die hier dokumentierten Beispiele, Überlegungen und empirischen Episoden stammen.

1.2 Eigene Positionsbestimmung: Fach- und sprachintegrierter Fokus auf Wissenskonstruktionsprozesse

Sprachliches Handlungsfeld „Aufbau konzeptuellen Verständnisses“

Vollmer und Thürmann (2010, S. 113ff) unterscheiden in ihrem Modell zur Beschreibung sprachlicher Anforderungen fünf Felder sprachlichen Handelns (vgl. Abb. 1). Diese Unterscheidung ist hilfreich zur Charakterisierung unterschiedlicher *Wirkungsweisen* sprachlicher Hindernisse auf den Zugang zur Mathematik: So können zum Beispiel manche Lernende die in Test-Aufgaben enthaltenen mathematischen Anforderungen aus sprachlichen Gründen nicht verstehen und daher ihre mathematischen Fähigkeiten nicht zeigen (Performanzproblem in einem Teilaspekt des Handlungsfelds 4: Arbeitsergebnisse präsentieren, vgl. Abb.1). Während diese Hürde in *Test*situationen durch eine sprachsensible Formulierung von Testaufgaben verringert werden kann, sind Hürden in *Lern*situationen schwerer behebbar, da sie nicht nur die Sprachrezeption, sondern auch die Sprachproduktion betreffen und längerfristige Auswirkungen haben:

Wer sich an der unterrichtlichen Kommunikation nicht angemessen beteiligen kann (Handlungsfeld 1), erhält nur eingeschränkten Zugang zum Unterrichtsgeschehen und damit zur Mathematik, ebenso wer Erklärungen der Lehrkraft oder Schulbucherläuterungen nicht versteht (Handlungsfeld 2). In beiden Fällen erzeugen sprachlich eingeschränkte Lernvoraussetzungen Hürden beim Aufbau mathematischer Kompetenzen und Vorstellungen.

Diese Wirkungsweise verstärkt sich in den Handlungsfeldern 3 und 5, weil Sprache neben der *kommunikativen Funktion* auch eine *kognitive Funktion* einnimmt (vgl. Maier & Schweiger, 1999, S. 11 zur Unterscheidung): Um „Ergebnisse und Vorgehensweisen kritisch [zu] reflektieren“ (Handlungsfeld 5), ist Sprache ebenso ein Werkzeug zur Erkenntnis- und Verstehensentwicklung wie um „[e]igenes Wissen [zu] strukturieren, an[zu]passen und [zu] erweitern“ (Handlungsfeld 3). Herausforderungen ergeben sich dabei insbesondere für Schülerinnen und Schüler, deren Erstsprache von der Unterrichtssprache abweicht und die deshalb keinen angemessenen Platz als „Sprache des Verstehens“ (nach Wagenschein, 1968, S. 122) im Lehr-Lernprozess hat – diese Herausforderungen gerade für zweitsprachliche Lernende hatte Wagenschein noch nicht im Blick.

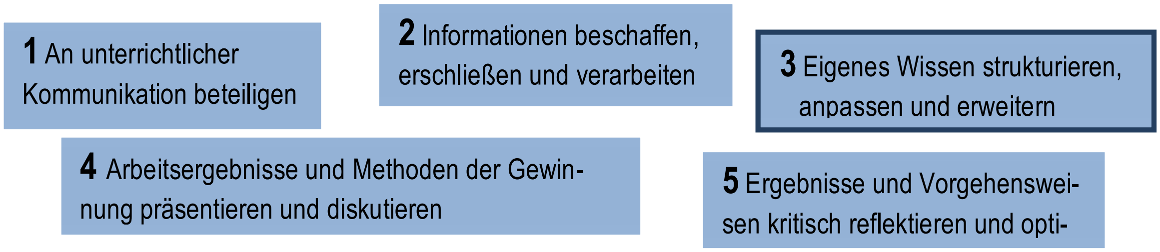


Abb. 1: Felder sprachlichen Handelns als Dimension 1 im Modell sprachlicher Anforderungen im Fachunterricht (nach Vollmer & Thürmann 2010, S. 113)

Die Studie, aus der im Folgenden Beispiele gezeigt werden, fokussiert auf das Handlungsfeld 3, mit Einschränkung auf *konzeptuelles Verständnis* (statt z.B. auf Fertigkeitsentwicklung), d.h. auf die Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen mathematischer Objekte und Operationen. Die Einschränkung ist begründet in zahlreichen Untersuchungen, die das konzeptuelle Verständnis als Nadelöhr für die Entwicklung mathematischer Kompetenz herausstellen (z.B. Moser Opitz, 2007; Prediger, 2010). Differentielle Analysen von Leistungsstudien zeigen (vgl. Ufer et al. in diesem Band), dass Lernende mit eingeschränkten sprachlichen Voraussetzungen gerade bei den Aufgaben besondere Schwierigkeiten haben, die konzeptuelles Verständnis erfordern. Dies gilt sogar für spracharme konzeptuelle Aufgaben wie Zahlen eintragen auf dem Zahlenstrahl. In der Studie sollen für diesen statistisch feststellbaren Effekt durch Tiefenanalysen auch Wirkungsmechanismen aufgezeigt werden.

Fach- und sprachintegrierte Perspektive

Oft wird gefragt, ob Schwierigkeiten von Lernenden mit eingeschränkten Sprachvoraussetzungen „eher sprachlichen *oder* eher fachlichen Ursprungs“ sind. Zwar ist diese Frage für die kommunikative Funktion von Sprache im Handlungsfeld 1, 2 und 4 relevant, doch für das Handlungsfeld 3 (und in Bezug auf die kognitive Funktion von Sprache) liegt der relevante Forschungsfokus gerade nicht in der *Unterscheidung*, sondern in der *Verflechtung* sprachlicher und fachlicher Aspekte. Um die Herausforderungen dieses Handlungsfelds adäquat zu fassen, muss demnach gefragt werden:

Wie greifen fachliche und sprachliche Herausforderungen in Phasen ineinander, in denen Lernende ihr Wissen strukturieren, anpassen und erweitern sollen?

Diese Frage wird in diesem Beitrag exemplarisch für zwei Aspekte im Handlungsfeld 3 bearbeitet: Zum einen die Vernetzung von Darstellungen als ganzheitliches Modell zur Sprachförderung (Abschnitt 2), zum anderen der fokussierte Aufbau konzeptuellen Verständnisses zu Begriffen (Abschnitt 3). Beide Felder werden konkretisiert im mathematischen Gegenstandsbereich des Vergleichs von Brüchen.

2. Vernetzung von Darstellungen und Registern

2.1 Darstellungsvielfalt am Beispiel des Vergleichs von Brüchen

Lern- und Testaufgaben zum Vergleich von Brüchen treten den Lernenden in ganz unterschiedlichen Darstellungen entgegen, wie die zwei (im MuM-Projekt entwickelten) Beispielaufgaben in sechs Darstellungsvarianten in Abbildung 2 zeigen: Die Aufgabe 1a zum Vergleich von Brüchen in symbolischer Darstellung kann übersetzt werden in eine graphische Darstellung wie in Aufgabe 1b oder in eine alltagssprachlich-verbale Darstellung wie in Aufgabe 1c. Für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses über Brüche sind diese drei Darstellungen zentral.

Oft sind Anforderungen (z.B. zum Vergleich von Brüchen) in Textaufgaben mit komplexeren Texten eingekleidet als in 2a, so dass Leseschwierigkeiten und Herausforderungen durch unterschiedliche sprachliche Formulierungen der Fachbegriffe hinzukommen, wie bei der komplexeren Torschützenaufgabe 2a. Ihre verbal-fachsprachliche Verdichtung in Aufgabe 2c (noch ohne symbolische Darstellung) zeigt den Kern der fachsprachlichen Decodierungsanforderungen: dass alle vier fachsprachlichen Wendungen durch *Brüche* zu mathematisieren sind, ist für Lernende keineswegs evident, einige nehmen sie zunächst als ganz unterschiedliche Angaben wahr. Die bildungssprachlich formulierte Aufgabe 2b hat denselben mathematischen und fachsprachlichen Kern wie die Aufgabe 2c, unterscheidet sich jedoch in der Zugänglichkeit durch Abstraktheit des Kontexts, in der Entpersonalisierung und in der Komplexität der sprachlichen Strukturen (vgl. Koch & Oesterreicher, 1985, zu allgemeinen Merkmalen).

<table>
<tr>
<td>Symbolisch-Numerische Darstellung

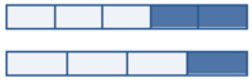
1a)
Was ist größer,
3/5 oder 3/4?</td>
<td>Alltagssprachliche Darstellung
2a) Wer ist der beste Torschütze?
Vier Kinder kämpften um den Titel des besten Torschützen beim Fußball. Paul hat bei 10 Schüssen 5 mal getroffen, aber bei Lisa gingen 75 % der Schüsse ins Tor. Jan dagegen traf 4 mal bei 6 Versuchen, bei Mara war jeder vierte Schuss ein Treffer. Nun gibt es Streit, wer am besten war. Wie sollte die Schiedsrichterin entscheiden?</td>
<td rowspan="2">Fachsprachliche Darstellung
2c)
Welches ist der größte Anteil?
• bei 10 Schüssen 5 mal
• 75 % der Schüsse
• 4 mal bei 6 Versuchen
• jeden vierten Schuss</td>
</tr>
<tr>
<td>Graphische Darstellung
1b)
Welcher Anteil ist größer?
</td>
<td>Bildungssprachliche Darstellung
2b) Studie zur Koordinationsfähigkeit
In einer Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen wurde eine Studie zur Koordinationsfähigkeit von Schülern durchgeführt, indem untersucht wurde, wie viele Schüsse beim Schießen auf eine Torwand ins Tor gingen. Insgesamt wurden vier Gruppen und ihre Trefferquoten verglichen: Gruppe 1 traf bei 10 Schüssen 5 mal, während bei der zweiten Gruppe 75% der Schüsse ins Tor gingen. In Gruppe 3, der auch die meisten Schüler angehörten, traf man 4 mal bei 6 Versuchen. In Gruppe 4 wurde bei jedem vierten Schuss ein Treffer erzielt. Welcher Gruppe gehören die Schüler an, die über die höchste Koordinationsfähigkeit verfügen?</td>
</tr>
</table>

Abb. 2: Zwei Aufgaben zum Vergleich von Brüchen in unterschiedlichen Darstellungen

2.2 Vernetzung von unterschiedlichen Darstellungsebenen

Die Bedeutung unterschiedlicher Darstellungen (verbal, graphisch, symbolisch-algebraisch, symbolisch-numerisch) für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses ist in der Mathematikdidaktik immer wieder herausgearbeitet und in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2003) durch die Einführung des prozessbezogenen Kompetenzbereichs „(K4) Mathematische Darstellungen verwenden" fixiert worden. Darin heißt es unter anderem, Schulabgänger der Klasse 10 sollen „verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden; Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen; unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln" (KMK, 2003, S. 10).

Das Herstellen von Beziehungen zwischen den Darstellungen (kurz: Darstellungsvernetzung) ist nicht nur prozessbezogenes *Lernziel*, sondern auch eine wichtige *Tätigkeit im Lernprozess* für den Aufbau inhaltsbezogener Kompetenzen. So haben psychologische und mathematikdidaktische Studien gezeigt, dass unterschiedliche Darstellungsformen mathematischer Zusammenhänge und die bewusste Übersetzung zwischen ihnen die Prozesse des Verstehens fachlicher Begriffe und Zusammenhänge unterstützen können (Lesh, 1979; Duval, 2006). Dabei kommt der Verbalisierung symbolischer Ausdrücke in Situationsbeschreibungen eine besondere Bedeutung für den Aufbau inhaltlichen Verständnisses zu (Bruner, 1967, S. 42; Wagenschein, 1968; Prediger, 2010).

Dies ist allerdings kein Selbstläufer, sondern erfordert gezielte Unterstützung, denn die Kompetenzen der Lernenden zum Wechsel zwischen Darstellungen streuen stark – sowohl inter-individuell (Goldin & Shteingold, 2001) als auch intra-individuell zwischen den jeweiligen Darstellungen. Untersuchungen zeigen, dass gerade Rechenschwächen oft mit fehlenden Fähigkeiten einhergehen, unterschiedliche Darstellungen miteinander zu vernetzen (Radatz, 1991; Moser Opitz, 2007).

Auch aus sprachdidaktischer Sicht wird der Tätigkeit der Darstellungsvernetzung für das fachliche Lernen eine große Bedeutung zugesprochen. So arbeitet etwa von Kügelgen in seiner linguistischen Untersuchung mathematischer Problemlöseprozesse ihre Isoliertheit als zentrale mentale Hürde heraus und bilanziert: „Die Problemlösung entsteht durch den mentalen Prozess der Vernetzung (in etwa: Übergänge und Rückbezüge) der Begriffsebenen und führt zum Zustand ihres dialektischen Aufgehobenseins ineinander" (von Kügelgen, 1994, S. 34; ähnlich bei Hallet, 2012).

Folgerichtig schlägt Leisen (2005, 2010) den Wechsel und die Vernetzung von Darstellungen als didaktischen Ansatz vor, um fach- und sprachintegriertes Lernen zu initiieren. Sowohl Leisen (2005) als auch von Kügelgen (1994) ordnen die Darstellungen nach zunehmender Abstraktheit und begreifen sie daher als Ebenen (wie in Abb. 3).

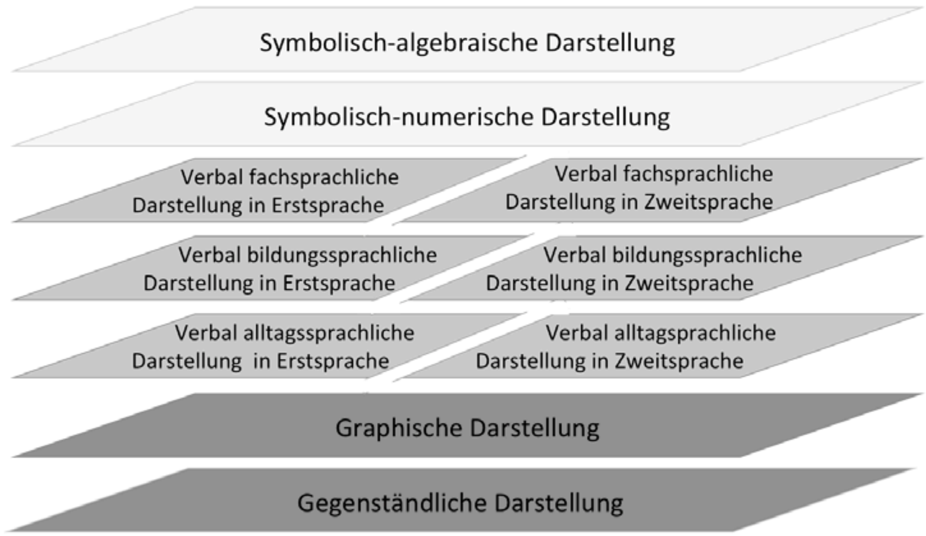


Abb. 3: Vielfältige Darstellungen im Mathematikunterricht (Prediger & Wessel, 2011)

Während in der mathematikdidaktischen Diskussion lediglich verbale, graphische, symbolisch-algebraische und symbolisch-numerische Darstellungen unterschieden werden, sind die sprachlichen Anforderungen erst adäquat fassbar, wenn die verbale Darstellungsebene ausdifferenziert wird in alltagssprachliche, in bildungssprachliche bzw. unterrichtssprachliche sowie in fachsprachliche Darstellungsebenen (von Kügelgen, 1994; Pimm, 1987). Zwischen ihnen zu wechseln, ist für die Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung.

Für Lernende mit nichtdeutscher Erstsprache ergibt sich die zusätzliche Herausforderung, dass verbalsprachliche Produktions- und Rezeptionsanforderungen meist in der (zweitsprachlichen) Bildungs- oder Fachsprache gestellt werden, während die individuelle Sprache des Verstehens eigentlich die (erstsprachliche) Alltagssprache ist (Clarkson, 2009). Im Modell der Darstellungsebenen aus Prediger und Wessel (2011), das in Abbildung 3 abgedruckt ist, sind daher die verbalsprachlichen Darstellungsebenen jeweils in Erst- und Zweitsprache aufgetrennt. Mit dem Pfeil wird die Notwendigkeit der oben beschriebenen Vernetzung verdeutlicht.

3. Theoretische Vertiefung: Register und Darstellungen

Obwohl sich das in Abbildung 3 abgedruckte Modell der unterschiedlichen Darstellungsebenen in seiner schlichten Hierarchie als heuristisches Mittel für die Initiierung produktiver Lernprozesse praktisch bewährt hat (Leisen, 2005, 2010; Prediger & Wessel, 2011), soll es theoretisch weiter ausdifferenziert und eingebettet werden, um unterschiedliche Facetten genauer zu beleuchten.

Erstens ist die angedeutete Hierarchie der Darstellungsebenen durch Stufen zunehmender Abstraktheit keineswegs eindeutig, sondern muss für jedes Beispiel neu angeordnet werden (z.B. liegt die graphische Ebene in ihrer Abstraktheit oft zwischen alltags- und fachsprachlicher Ebene und dient zwischen ihnen als Mittler). Zweitens ist die genaue Konzeptualisierung des Konstrukts ‚Darstellungen' überdenkenswert. Dazu gibt es unterschiedliche Ansätze, die verschiedene Aspekte pointieren:

- Eine Konzeptualisierung allein als unterschiedliche Modi der Repräsentationen (wie bei Bruner, 1967) ist insofern zu schmal, als im Konstrukt ‚Repräsentationen' die verschiedenen Bedeutungsbezüge, Funktionen des Sprachgebrauchs und soziale Einbettungen zu wenig angelegt sind. Daher könnte das Konstrukt ‚Repräsentationen' suggerieren, dass zwischen allen Darstellungen eindeutige Übersetzungen ohne Bedeutungs- und Funktionsverschiebungen möglich sind.
- Der Sprachwissenschaftler von Kügelgen (1994, S. 34) spricht von ‚Begriffsebenen', was ein ähnliches Hierarchisierungsproblem wie ‚Darstellungsebenen' mit sich bringt und durch den engen Fokus auf die Wortebene die Breite der Ausdrucksmittel nicht erfassen kann.
- Der Fremdsprachendidaktiker Hallet (2011) fokussiert insbesondere die „symbolic languages" und ihre je spezifische semiotische Funktion, eigene Zugänge zur Erklärung und Beschreibung von Welt zu ermöglichen.
- Auch der Mathematikdidaktiker Duval spricht von ‚semiotic registers' (Duval, 2006, S. 111). Er betont, dass sich die Bedeutung (bei ihm ‚content') eines mathematischen Objekts durch den Darstellungswechsel verändern kann:

> „The content of a representation depends more on the register of the representation than on the object represented. That is the reason why passing from one register to another changes not only the means of treatment, but also the properties that can be made explicit." (Duval, 2006, S. 111)

Damit weist Duval auf einen Aspekt hin, der auch für das (anders konzeptualisierte) soziolinguistische Konstrukt des *Registers* im Sinne Hallidays (1978) zentral erscheint. Halliday grenzte Register von Dialekten ab, indem er Dialekte als Wege beschrieb, dasselbe unterschiedlich auszudrücken (ähnliches gilt oft für Darstellungen), aber Register als „ways of saying different things" (Halliday, 1978, S. 35). Der Wechsel des Registers verändert also auch den Inhalt des Gesagten. Dabei ist die soziale Eingebundenheit der Register in spezifische Kommunikationssituation entscheidend für die Charakterisierung von Registern:

> „A register can be defined as the configuration of semantic ressources that a member of a culture typically associates with the situation type. It is the meaning potential that is accessible in a given social context." (Halliday, 1978, zit. nach Dittmar, 2005, S. 218).

Dementsprechend sind Register charakterisierbar durch die jeweiligen Typen von Kommunikationssituationen, in denen sie angewandt werden, sowie durch ihr Sprachgebrauchsfeld, die zugehörigen Diskursstile und Diskursmodi.

Als Register im Sinne Hallidays lassen sich Alltags-, Bildungs- und Fachsprache konzeptualisieren, die in unterschiedlichen Kommunikationssituationen genutzt werden. Fachsprache wird im Anschluss daran hier spezifiziert als die für Fach*unterricht* spezifische Sprache, nicht als die Wissenschaftssprache. Alltags-, Bildungs- und Fachsprache sind dabei nicht als disjunkte Kategorien zu verstehen, sondern als graduelle Unterscheidungen in einem Kontinuum. Die drei Register umfassen nicht nur die verbale, sondern auch jeweils unterschiedliche weitere Darstellungsebenen.

Das alltagssprachliche Register ist charakterisierbar durch konzeptionelle Mündlichkeit und oft fehlende Explizitheit, die typisch ist für den Einsatz in face-to-face-Kommunikation. Es umfasst neben der verbalen auch die gegenständliche Darstellungsebene, selten jedoch graphisch-abstrakte und symbolische Darstellungen.

Das bildungssprachliche Register ist gekennzeichnet durch konzeptionelle Schriftlichkeit im medial mündlichen und schriftlichen Modus, durch größere Explizitheit, höhere Komplexität der grammatischen Strukturen und Entpersonalisierung. Im Mathematikunterricht wird es oft genutzt im Zusammenhang mit außermathematischen Kontexten, die über die unmittelbare Lebenswelt der Lernenden hinausgehen (wie im Beispiel oben die Studie zur Koordinationsfähigkeit), aber auch zur Regulierung der Unterrichtsaktivitäten (Arbeitsaufträge etc.). Das bildungssprachliche Register bedient sich in der verbalen Darstellung zuweilen auch fachsprachlicher Termini, daneben der graphischen und symbolisch-numerischen Darstellungsebenen (vgl. Meyer & Prediger 2012 für ein Beispiel zu den unterschiedlichen Darstellungen in und zwischen den Registern). Während etwa in Zeitungen mathematisch-graphische Darstellungen oft ebenso aktiviert werden wie einzelne Zahlen oder Tabellen, umfasst das bildungssprachliche Register i.d.R. keine symbolisch-algebraischen Darstellungen durch Variable, Terme und Formeln.

Das fachsprachliche Register ist durch Anwendung in ähnlichen Kommunikationssituationen und Diskursmodi charakterisierbar wie das bildungssprachliche, ist aber noch weiter optimiert in Richtung Ökonomie und Eindeutigkeit der Kommunikation über eng abgegrenzte, nämlich im Fall der Mathematik über strukturelle und quantifizierbare Zusammenhänge. Im Mathematikunterricht wird das fachsprachliche Register meist in rein innermathematischen Zusammenhängen ohne außermathematische Bezüge oder in Situationen genutzt, in denen mathematische Strukturen in lebensweltliche Kontexte hineingedeutet werden.

Neben der verbalen Darstellungsebene umfasst das fachsprachliche Register auch die graphische, die symbolisch-numerische und die symbolisch-algebraische Darstellungsebene. Gerade die Formelsprache wird von vielen Lernenden als typisch mathematisch erlebt, während graphische Darstellungen oft nicht bewusst als fachsprachlich wahrgenommen werden, aber als spezifisches Ausdrucksmittel für spezialisierte Zwecke zur Fachsprache gehören (vgl. Maier & Schweiger, 1999).

Insbesondere die symbolisch-algebraische Darstellung, im Allgemeinen Formelsprache genannt, ermöglicht eine (kalkülhafte) Weiterverarbeitung der dargestellten Zusammenhänge, die weit über die Möglichkeiten der anderen Darstellungen hinaus geht. Die symbolisch-algebraische Darstellung hat daher ganz spezifische Charakteristika mit einem sehr spezifischem Sprachgebrauch, eigenem Diskursstil und Modus (Maier & Schweiger, 1999), die eine Charakterisierung als eigenes formelsprachliches Register als ebenfalls möglich erscheinen lässt, wenn in dem untersuchten mathematischen Feld auf diese Charakteristika zurückgegriffen wird. Da in der hier vorliegenden Studie nur Brüche verglichen werden ohne Rückgriff auf kalkülhaft symbolisches Rechnen, nimmt die symbolische Darstellungsebene in dieser Studie nicht die Rolle eines eigenen Registers ein.

Verbunden mit dem Registerkonzept Hallidays ist also vor allem auch ihre Anwendung in unterschiedlichen Gebrauchssituationen, demnach ist ein adäquater Umgang mit der Vielfalt der Darstellungen verknüpft mit einem situationsangemessenen Gebrauch der jeweiligen Register und ihrer Darstellungen. Er kann durch gezielte und reflektierte Vernetzung der Register und Darstellungen erworben werden (Meyer & Prediger, 2012; Prediger & Wessel, 2011).

Während die Darstellungs- und Registervernetzung eher zu den ganzheitlichen Sprachfördermaßnahmen gehören, zeigt das folgende Beispiel eine fokussierte Förderung, die gezielt am Aufbau konzeptuellen Verständnisses zu einzelnen Begriffen arbeitet (zur Unterteilung ganzheitlich/fokussiert vgl. Meyer & Prediger, 2012).

3. Aufbau konzeptuellen Verständnisses von Begriffen – Mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen

3.1 Fokus auf Begriffe

Welche Rolle spielen nun Darstellungsvernetzungen für den Aufbau des konzeptuellen Verständnisses von Begriffen? Der Abschnitt thematisiert den Aufbau konzeptuellen Verständnisses mit dem Fokus auf Begriffe, da dieser Bereich einerseits mathematikdidaktisch in seiner epistemologischen Funktion und seinen Erwerbsmechanismen bereits am besten verstanden ist (Freudenthal, 1983; Steinbring, 2005). Andererseits ist er in seinen sprachlichen Anforderungen während der mentalen Bedeutungskonstruktion hinreichend komplex, um zentrale Phänomene der Verwobenheit fachlich-konzeptuellen und sprachlichen Lernens aufzeigen zu können.

Forschungsmethodisch ist es nicht leicht zu erfassen, wann Lernende einen mathematischen Begriff verstanden haben. Bei Begriffen zu physischen Objekten diagnostiziert man: Ein Kind weiß, was ein Begriff bedeutet, wenn es auf zugehörige physische Objekte aus dem Begriffsumfang zeigen kann. Doch worauf sollte man für den Begriff Bruch zeigen, wenn man in der physischen Welt Anteile nicht unmittelbar „sehen“ kann?

Bei abstrakten Begriffen müssen die zugehörigen Objekte des Begriffsumfangs zunächst mental konstruiert werden. Freudenthal (1983) hat daher *Begriffsbildung als Konstruktion mentaler Denkobjekte* beschrieben. Für die Diagnose der erfolgreichen Konstruktion eines neuen mentalen Denkobjekts werden in der mathematikdidaktischen Literatur vor allem zwei Möglichkeiten beschrieben: Ein Individuum hat einen Begriff normgerecht gebildet,

- wenn es ihn in Sachsituationen zur Beschreibung von Phänomenen oder zur Lösung von Problemen adäquat anwenden kann (Freudenthal, 1983).
- wenn es zwischen seinen verschiedenen Darstellungen hin- und herwechseln kann: Verbal ↔ symbolisch ↔ graphisch ↔ numerisch (Lesh, 1979; Duval, 2006).

Wie sprachliche und fachliche Anforderungen bei der Konstruktion mentaler Denkobjekte ineinander greifen, soll an einer empirischen Episode aus dem MuM-Projekt gezeigt werden.

3.2 Episode: Ismet, Cavit und das Vergleichen von Bruchstreifen

Cavit und Ismet, zwei Hauptschüler der Klasse 7, nahmen an einer Förderung zu Brüchen teil. Um zu diagnostizieren, ob die beiden über eine tragfähige Anteilsvorstellung verfügen, bittet der Förderlehrer die Jungen, zu zwei Bruchstreifen die passenden Brüche anzugeben. Beide Jungen nennen die Brüche ohne Zögern: 3/4 und 3/5. Während der Darstellungswechsel an sich sehr gut gelingt, ist eine Verständigung darüber, wie das Bild zu deuten sei, für beide Beteiligte schwierig:

9	Lehrer	... <u>was</u> von dieser Darstellung *(zeigt auf Bruchstreifen-Karte)* stellt jetzt den Bruch dar´
10	Cavit	Äh … äh die ... erstmal muss man alle Kästchen zählen das sind fünf und dann die drei angemalten, *(leise)* drei Fünftel
11	Lehrer	Genau … was *(zeigt auf Bruchstreifen-Karte)* von den beiden stellt jetzt die drei Fünftel dar´
12	Cavit	Äh ... die .... erstmal (*zeigt auf Bruchstreifen-Karte*) muss man die alle Kästchen zählen, und das sind (*tippt auf jedes Feld des ersten oberen Bruchstreifens*) eins zwei drei vier fünf ´ (*schaut zum Lehrer auf*)

Hier zeigt sich bei Lehrer und Schüler eine interessante Form der Sprachlosigkeit: Beide drücken sich flüssig und fehlerfrei aus; gleichwohl stockt das Gespräch, weil Cavit zwar die Anleitung für eine korrekte Zeichnung des Bruchstreifens versprachlichen kann, aber innerhalb der Zeichnung den Bruch nicht genauer verortet. Dies begrenzt die Kommunikation über die genaue Bedeutung des Bildes und der inhärenten Strukturen. Als der Lehrer seine Frage schlicht wiederholt, ohne Signal, wie sie anders zu deuten ist, wiederholt Cavit noch einmal dasselbe und expliziert lediglich durch Zählen, wie man zur Zahl Fünf kommt.

Als Cavit und Ismet kurze Zeit später das Bild nutzen sollen, um ihren zuvor angestellten falschen symbolischen Vergleich „3/5 > 3/4" zu widerlegen, wird deutlich, dass in der Szene (Z. 9-12) kein rein sprachliches Problem vorliegt, sondern ihre Vorstellung vom Anteil noch nicht tragfähig ist:

17	Lehrer	... wie kann man das an dem Bild erkennen, dass dieser Bruch *(zeigt auf 3/5)* wenn ihr sagt der ist größer als der *(zeigt auf 3/4)* wie kann man das an diesem Bild *(zeigt auf Bruchstreifen auf der Karte)* erkennen' Und ist das überhaupt so ... das ist ja auch die Frage. … [...]
...		
24	Ismet	[...] weil hier ist ja *(zeigt auf 3/5-Streifen)* fünf und hier sind vier *(zeigt auf 3/4-Streifen)* dann erkennt man ja dass dat *(zeigt auf 3/5-Streifen)* größer ist und das *(zeigt auf 3/4-Streifen)* klein [...]

Zwar können Cavit und Ismet den symbolisch dargestellten Brüchen die richtigen bildlichen Darstellungen zuordnen, doch wird erst beim Vergleichen der Anteile deutlich, dass ihre *Deutung* der Bruchstreifen nicht der fachlich intendierten Deutung entspricht: Ismet begründet (in Z. 24) seine Einschätzung, dass 3/5 größer als 3/4 ist, indem er darauf verweist, dass der 3/5-Streifen in mehr Felder unterteilt ist. Cavit stimmt dieser abweichenden Deutung zu (in nicht abgedruckten Zeilen). Fachlich intendiert ist die Deutung des Bruchs 3/5 als Anteil der 3 an der 5 bzw. als „3 von 5“. Cavit und Ismet dagegen sprechen von „das sind fünf und dann die drei angemalten“ (Z. 10) und deuten das „und“ mit vorrangigem Fokus auf die Zahl der Felder, die durch den Nenner des Bruchs gegeben ist.

3.3 Konstruktion mentaler Beziehungen als sprachliche Herausforderung

Hier zeigt sich eine besondere Herausforderung mathematischer Begriffe in ihrer ontologischen Natur: Sie sind nicht nur *abstrakte, sondern auch relationale Begriffe* (Cassirer 1910). Das neu zu konstruierende Denkobjekt „Anteil“ erfasst eine spezifische Beziehung zwischen der 3 und der 5, die durch den Bruchstreifen allein nicht vollständig ausgedrückt ist. Dieses Charakteristikum mathematischer Begriffe hebt Steinbring als Charakteristikum der Mathematik hervor: „Der für eine wissenschaftliche Mathematikdidaktik wesentliche Aspekt in der Natur des mathematischen Wissens besteht darin, dass mathematische Begriffe sich nicht direkt auf Dinge der Welt beziehen, sondern auf *Beziehungen zwischen Dingen.“* (Steinbring, 1998, S. 162; Hervorhebung im Original)

Die von Steinbring beschriebene spezifische ontologische Natur mathematischer Begriffe als *bezogen auf Beziehungen statt Objekte* birgt sowohl epistemologische als auch sprachliche Herausforderungen: Die mentale Bedeutungskonstruktion für relationale Begriffe erfordert eine mentale Konstruktion von *Beziehungen*. Eine solche Konstruktion von Beziehungen erfolgt nicht allein durch Darstellungswechsel, sondern muss im Diskurs durch eine verbale Explizierung unterstützt werden. Dazu müssen jedoch geeignete (bildungssprachliche) Sprachmittel zur Verfügung stehen. Die sachgerechte Nutzung der Sprachmittel setzt allerdings wiederum die Verfügbarkeit der Bedeutungen voraus; das gegenseitige Abhängigkeitsverhältnis der konzeptuellen und sprachlichen Herausforderungen ist somit zirkulär:

Die spezifische Bedeutung des Bruchs 3/5 liegt gerade in der Anteils-Beziehung zwischen 3 und 5. Wer diese Beziehung mental noch nicht konstruiert hat, kann die sprachliche Umschreibung “3 von 5“ oder „der Anteil der 3 an der 5“ nicht mit Bedeutung füllen. Somit bedingen sich die Entwicklung mathematischer Begriffe und der zugehörigen Sprachmittel zu ihrer Erklärung gegenseitig. Gerade für Lernende mit Deutsch als Zweitsprache, deren Repertoire an Sprachmitteln zum Ausdrücken von Beziehungen begrenzt ist (wie bei Cavit, der immer nur „und“ benutzt) zeigt sich die Beschränktheit des sprachlichen Repertoires als Hürde für die kognitive Weiterentwicklung der wesentlichen mathematischen Beziehungen. Dies ist das zentrale Argument, warum der konzeptuelle und sprachliche Lernprozess miteinander verschränkt werden müssen.

3.4 Externe Ressourcen für die mentale Konstruktion von Beziehungen

Dass sich also Sprachmittel und ihre Bedeutungen möglichst miteinander entwickeln sollen, ist auch ein wesentlicher Grund, warum die Aktivierung anderer Darstellungen für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses so zentral ist: Die anderen Darstellungen (in Bildern, lebensweltlichen Situationen etc.) ermöglichen eine Bedeutungskonstruktion vor der bildungssprachlichen Erklärung (Prediger, 2010). So kann etwa ein Anteilskonzept entwickelt werden in verschiedenen Kontexten (Prediger, Barzel, Hußmann & Leuders, 2013):

- Kontext von Trefferquoten: Werden 3 von 5 gedeutet als 3 Treffer bei 5 Schüssen, so ist klar, dass dies ein weniger gutes Ergebnis ist als bei 3 Treffern von 4 Schüssen.
- Kontext des (aktiv vollzogenen!) Mischens von Kirsch-Bananensaft: Werden 3 von 5 gedeutet als 3 Teile Kirschsaft in insgesamt 5 Teilen Kirschbananensaft, so schmeckt dieser weniger nach Banane als bei 3 von 4.

Solche Kontexteinbindungen ermöglichen die Konstruktion von mentalen Bedeutungen und Beziehungen, die dann mit neuen sprachlichen Mitteln wie „3 von 5" belegt werden können. Gerade für Schülerinnen und Schüler mit bildungssprachlichen Einschränkungen sind daher Kontexteinbettungen eine wichtige Stütze zum nachhaltigen Aufbau konzeptuellen Verständnisses ausgehend von mitgebrachten Ressourcen vorunterrichtlicher Vorstellungen (Prediger, 2010; van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Aufbauend auf solchen Aktivierungen vorunterrichtlicher Ressourcen kann das Repertoire der Sprachmittel sukzessive ausgebaut werden (Gibbons, 2010), und zwar parallel zum Aufbau konzeptuellen Verständnisses.

4. Fazit

Sprache gilt in der Mathematikdidaktik und zunehmend in der Praxis sprachsensiblen Mathematikunterrichts als relevanter Lerngegenstand, Lernmedium und zu schaffende Lernvoraussetzung, und zwar nicht nur für Lernende mit Deutsch als Zweitsprache. Die Entwicklung und Explizierung von Denksprache im Prozess der Erarbeitung eines Konzepts erweist sich dabei als ein Kern allen Fachlernens. Gerade die Vernetzung von Darstellungen und Registern bewährt sich als Förderansatz, auch zum Aufbau konzeptuellen Verständnisses.

Bzgl. aller drei formulierten Rollen als Lerngegenstand, -medium und –voraussetzung gibt es sowohl relevante fachübergreifende als auch fachspezifische Aspekte. In der didaktischen Forschung und Entwicklung den Fokus auf die *fachübergreifenden* Aspekte zu setzen, hat den Vorteil, dass man die Ergebnisse in Förderprogramme integrieren kann, die durchgängig in allen Fächern eingesetzt werden und so durch Kohärenz über die Fächer hinweg ihre Wirkung entfalten können (z.B. das Darstellungsvernetzen oder das Leseförderprogramm des Studienseminars Koblenz, 2009). Auch fachübergreifend einsetzbare kommunikationsfördernde Unterrichtsmethoden gehören in diesen Kontext.

Aus fachdidaktischer Sicht ist es jedoch von mindestens ebenso großer Bedeutung, komplementär auch die *fachspezifischen* Aspekte herauszuarbeiten, um die Grenzen durchgängiger fachübergreifender Programme zu identifizieren und das genuin fachliche Lernen nicht aus dem Blick zu verlieren. Denn jedes Fach hat spezifische epistemologische und ontologische Charakteristika, die es zu berücksichtigen gilt; ein Beispiel bietet die hier aufgezeigte ontologische Natur mathematischer Begriffe als relationale Begriffe, deren Bedeutungserschließung die mentale Konstruktion von Beziehungen erfordert.

Das kurze konkrete Beispiel zum Vergleich von Brüchen lässt erahnen, dass auf der Detailstufe der konkreten Diagnose und Förderung das Verhältnis sprachlicher und fachlicher Aspekte tatsächlich für jeden mathematischen Gegenstand einzeln analysiert und konkret ausgearbeitet werden muss. Hier ergibt sich ein immenser Forschungs- und Entwicklungsbedarf, der idealerweise in enger Kooperation zwischen Sprachdidaktik, Sprachwissenschaft und Fachdidaktik durchgeführt wird.

Literatur

Ahrenholz, B. (Hrsg.). (2010). *Fachunterricht und Deutsch als Zweitsprache.* Tübingen: Narr.

Barwell, R. (Hrsg.). (2009). *Multilingualism in Mathematics Classrooms – Global Perspectives.* Bristol: Multilingual Matters.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007): *Mathematik – Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bauersfeld, H. (1983). Kommunikationsverläufe im Mathematikunterricht. Diskutiert am Beispiel des „Trichtermusters“. In K. Ehlich & J. Rehbein (Hrsg.), *Kommunikation in der Schule und Hochschule. Linguistische und ethnomethodologische Analysen* (Kommunikation und Institution 2) (S. 21–28). Tübingen: Narr.

Begehr, A. (2004). *Teilnahme und Teilhabe am Mathematikunterricht – Eine Analyse von Schülerpartizipation*. Berlin: Dissertation, FU Berlin.

Bruner, J. S. (1967). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cassirer, E. (1910). *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*. Berlin: Verlag von Bruno Cassirer. (Wiedergedruckt 1922; Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft).

Clarkson, P. C. (2009). Mathematics Teaching in Australian Multilingual Classrooms. In R. Barwell (Hrsg.), *Multilingualism in Mathematics Classrooms – Global Perspectives* (S. 145–160). Bristol u.a.: Multilingual Matters.

Cummins, J. (1986). Language proficiency and academic achievement. In J. Cummins & M. Swain (Hrsg.), *Bilingualism in education: aspects of theory, research and practice* (S. 138–161). London: Longman.

Dittmar, N. (2005). Register. In U. Ammon, N. Dittmar, K. J. Mattheier & P. Trudgil (Hrsg.), *Sociolinguistics: An International Handbook of the Science of Language and Society. Soziolinguistik: Ein internationales Handbuch der Wissenschaft von Sprache und Gesellschaft*, Bd. 1 (S. 216–225). Berlin & New York: de Gruyter.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

Ellerton, N. & Clarkson, P. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In Bishop, A. J. et al. (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer, 987–1033.

Fetzer, M. (2007). *Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Fröhlich, I. & Prediger, S. (2008). Sprichst du Mathe? Kommunizieren im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 50 (24), 1–8.

Gallin, P. & Ruf, U. (1990). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Gibbons, P. (2010). Learning Academic Registers in Context. In C. Benholz, G. Kniffka & E. Winters-Ohle (Hrsg.), *Fachliche und sprachliche Förderung von Schülern mit Migrationsgeschichte* (S. 25–37). Münster: Waxmann.

Gogolin, I. (2006). Bilingualität und die Bildungssprache der Schule. In P. Mecheril & T. Quehl (Hrsg.), *Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule* (S. 79–85). Münster: Waxmann.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (S. 1–23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics 2001 Yearbook.

Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Hallet, W. (2012). Semiotic Translation and Literacy Learning in CLIL. In D. Marsh & O. Meyer (Hrsg.), *Quality Interfaces: Examining Evidence & Exploring Solutions in CLIL*. Eichstaett: Eichstaett Academic Press.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Maryland: University Park Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Bogard Givvin, K. & Hollingsworth, H. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results From the TIMSS 1999 Video Study*. Washington: NCES.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*, Beschluss der KMK vom 4.12.2003. München: Luchterhand.

Koch, P. & Oesterreicher W. (1985). Sprache der Nähe - Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgebrauch. *Romanistisches Jahrbuch,* 36 (85), 15–43.

Krummheuer, G. (1985). Analyse von mathematischen Lernprozessen in „Kleingruppen intensiv kommunizierender Schüler“. In W. Dörfler, & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 153–158). Stuttgart: Teubner.

Kügelgen, R. von (1994). *Diskurs Mathematik. Kommunikationsanalysen zum reflektierenden Lernen.* Frankfurt/M. u.a.: Lang.

Kuntze, S. & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk’ ich. Über Mathematik schreiben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47 (5), 1–6.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch*, 78, 9–11.

Leisen, J. (2010). *Handbuch Sprachförderung im Fach: Sprachsensibler Fachunterricht*. Bonn: Varus.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. In R. Lesh, D. Mierkiewicz & M. G. Kantowski (Hrsg.), *Applied mathematical problem solving* (S. 111–180). Columbus: OH.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster – Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Heidelberg u.a.: Springer Spektrum.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht.* Wien: oebv und hpt Verlagsgesellschaft.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 54 (45), 1–8.

MSWWF – Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes NRW (Hrsg.). (1999). *Förderung in der deutschen Sprache als Aufgabe des Unterrichts in allen Fächern.* Empfehlungen. Frechen: Ritterbach.

Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. In P. Gates, P. (Hrsg.), *Issues in Mathematics Teaching* (S. 232–244). London: Routledge Falmer.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classroom*. London & New York: Routledge/Keagan Paul.

Prediger, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.). *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der GDCP* (S. 6–20). Berlin: LIT.

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2013). (Hrsg.). *Mathewerkstatt 6.* Cornelsen, Berlin.

Prediger, S. & Özdil, E. (2011). (Hrsg.). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung.* Mehrsprachigkeit, Bd. 32. Münster u.a.: Waxmann.

Prediger, S. & Vernay, R. (2005). Kreisbilder erklären im Gruppenpuzzle – eine kommunikative Herausforderung. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47 (6), 17–22.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen: Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger, E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung* (S. 163–184). Münster: Waxmann.

Radatz, H. (1991). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 74–89). Köln: Aulis.

Steinbring, H. (1998). Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 30 (5), 161–167.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective.* Berlin & New York: Springer.

Studienseminar Koblenz (2009). (Hrsg). *Sachtexte lesen im Fachunterricht der Sekundarstufe*. Seelze: Kallmeyer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54 (1), 9–35.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht: theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Weinheim: Beltz.

Vollmer, H. J. & Thürmann, E. (2010). Zur Sprachlichkeit des Fachlernens: Modellierung eines Referenzrahmens für Deutsch als Zweitsprache. In B. Ahrenholz (Hrsg.), *Fachunterricht und Deutsch als Zweitsprache* (S. 107–132). Tübingen: Narr.

Wagenschein, M. (1968). *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch*. Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 7 (3), 106–116.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4 (3), 175–204.

Wittenberg, A. I. (1957). *Vom Denken in Begriffen*. Basel & Stuttgart: Birkhäuser.