



## Wozu rechnen wir mit Anteilen?

### Herausforderungen der Sinnstiftung am schwierigen Beispiel der Bruchoperationen

Susanne Prediger, Matthias Glade und Ulla Schmidt

Vorversion eines Artikels aus Praxis der Mathematik in der Schule 52(37) Februar 2011.

**Zusammenfassung:** Sinnstiftung kann sich nicht allein an Begriffsbildungen mit inner- und außermathematischen Anlässen orientieren, sondern muss auch bei innermathematischen Strukturfragen stattfinden. Dazu bietet die Bruchrechnung im Verlauf der Sekundarstufe I eine der frühen Herausforderungen. Der Artikel stellt Ansätze zum Umgang mit sogenannten horizontalen und vertikalen Mathematisierungsprozessen vor und erläutert am Beispiel des Vergleichens und Addierens von Brüchen, wie diese sinnstiftend gestaltet werden können und wo dabei Grenzen liegen.

Wozu rechnen wir mit Anteilen? Wurden sie wirklich dazu erfunden, um den genauen Anteil an der geteilten Pizza zu ermitteln? Und muss für diesen Zweck wirklich auch das Operieren mit Brüchen so intensiv geübt werden?

Die Diskussion um die Didaktik der Brüche hat in den letzten Jahren vorrangig zwei Stränge verfolgt: Zum einen wurde die Relevanz der Bruchrechnung insgesamt in Frage gestellt mit dem Verweis auf die höhere Alltagsrelevanz der Dezimalzahlen (zusammenfassend Padberg 2009, S. 1–3). Zum anderen wurde viel Arbeit darin investiert, Brüche und ihre Operationen verstehensorientiert einzuführen, damit nicht nur Kalkül, sondern auch inhaltliche Vorstellungen aufgebaut werden können (z. B. Malle 2004, Prediger 2006). Beide Stränge mathematikdidaktischer Bemühungen berühren die Frage nach der Sinnstiftung des Themengebietes, allerdings ohne sie wirklich zu klären: Die Abschaffung oder Marginalisierung der Brüche in der Schule bietet aus unserer Sicht keine adäquate Lösung für die Sinnfrage, denn dazu sind zumindest die einfachen Brüche auch in der Lebenswelt zu bedeutsam. Die Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen dagegen ist zwar eine elementare Voraussetzung, um ein Gefühl für Sinn und Bedeutung der Brüche zu bekommen, aber sie erschöpft sich keineswegs darin.

Im Artikel sollen weitere Antworten auf die Sinnfrage vorgestellt werden, wie sie in den Brückkapiteln des Schulbuchs *mathewerkstatt* (Glade/Prediger/Schmidt 2012, Barzel/Hußmann/Schneider/Streit 2012) mit Hilfe der Konstruktion von Kontext- und Strukturproblemen im Sinne

der horizontalen und vertikalen Mathematisierung gefunden wurden. Dabei werden an diesem schwierigen Beispiel auch Grenzen und Herausforderungen des Anspruchs auf Sinnstiftung deutlich.

### **Horizontale und vertikale Mathematisierung als sinnstiftende Tätigkeiten**

In den meisten Lehrbüchern werden heutzutage Brüche in lebensweltlichen Kontexten eingeführt: Anteile werden beschrieben (zum Beispiel beim Teilen von Pizzen oder Gewinnchancen in Lostrommeln), Größen mit gebrochenen Maßen gemessen (zum Beispiel für Rezepte) und Verhältnisse beschrieben (zum Beispiel für die Messung von Steigungen oder Mischungsverhältnissen im Kirsch-Bananensaft) (ähnlich Barzel et al. 2012). Während die neuen *Zahlen* in diesen Kontexten tatsächlich neue reichhaltige Beschreibungsmöglichkeiten liefern, die die Kinder durch eigenständige Mathematisierungen entwickeln können (vgl. Freudenthal 1991), sind die *Operationen* mit Brüchen jeweils nur in wenigen dieser Kontexte sinnvoll: Wozu sollte man Pizzen-Reste verrechnen? In welchen Kontexten werden wirklich Brüche jenseits von  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{4}$  dividiert?

Soll eine sinnstiftende Einführung der Operationen mit Brüchen mithilfe zu mathematisierender Kontextprobleme erfolgen, müssen diese Kontexte daher sehr sorgfältig gewählt und im Laufe des Aufbaus des Brüche-Curriculums variiert werden, damit die Operationen tatsächlich als Antwort auf authentische Probleme erlebbar werden. Dies soll im Folgenden zunächst an Beispielen erläutert werden und im letzten Abschnitt durch eine Übersicht zur Vielfalt möglicher Kontexte und Probleme für unterschiedliche Operationen eingebettet werden (*Kasten 4*).

Kontextprobleme haben ihre wichtige Funktion, doch können die zu erschließenden Probleme nicht immer Kontextprobleme sein, weil die Nutzung von Brüchen in Alltagskontexten nicht immer authentisch ist. So wird zum Beispiel die Addition von Brüchen in realen Situationen meist durch Übergang zu Prozentzahlen oder Dezimalbrüchen umgangen. Neben den *horizontalen Mathematisierungsprozessen* von lebensweltlichen Kontexten in die Mathematik hinein, die in anderen Beiträgen dieses Heftes ausführlich beschrieben sind, werden im Themengebiet Bruchoperationen daher auch sogenannte *vertikale Mathematisierungsprozesse* als sinnstiftende Erfahrungen notwendig. Als „vertikale Mathematisierung“ werden in der niederländischen Mathematikdidaktik Prozesse der (möglichst eigenständigen) Schematisierung bezeichnet, die sich innerhalb der formalen Welt vollziehen, insbesondere die Mathematisierung der eigenen mathematischen Tätigkeiten (Freudenthal 1991, S. 41 f.).

Was mit horizontalen und vertikalen Mathematisierungen genau gemeint ist und inwiefern sie durch eigenaktive Erfahrung die Möglichkeit zur Konstruktion von Sinn und Bedeutung abstrakterer mathematischer Inhalte bieten, soll im Folgenden an Beispielen erläutert werden.

### **Beispiel Brüche vergleichen – Horizontales Mathematisieren**

Woran erkennt man eigentlich gute Kontextprobleme? Im Sinne der didaktischen Phänomenologie (Freudenthal 1983) beginnt die Suche oder Konstruktion sinnstiftender Lernsituationen mit der Frage, in welchen authentischen (inner- oder außermathematischen) Kontexten der zu lernende mathematische Inhalt tatsächlich eine Problemlösung bietet.

Für das Vergleichen von Brüchen erscheint das Kontextproblem, wer mehr Pizza bekommen hat, allein wenig kraftvoll, zumal man das entweder sieht oder die zumeist gleich großen Stücke einfach zählen kann. Spannender sind diejenigen Situationen, in denen die Nutzung von Brüchen zum Vergleich überhaupt erst erfunden werden muss, zum Beispiel um den Vergleich gerechter zu machen. Aus der Rückschauerspektive ist diese Erfindung trivialisiert durch das statistische Konzept der relativen Häufigkeit. Wer dieses aber selbst erfinden muss, kann es als gute Idee würdigen.

Das Nacherfinden des Konzepts der relativen Häufigkeit setzt eine Kenntnis von Anteilen aus anderen Zusammenhängen voraus. In der *mathewerkstatt* werden daher Anteile zunächst als Beschreibungsmittel für Verteilungsprozesse (z. B. von Pizzen) entwickelt (Barzel et al. 2012). Im späteren Kapitel, das in die Operationen mit Brüchen einführen soll, werden sie dann wieder entdeckt als Antwort auf die Kernfrage, „Wie kann ich Häufigkeiten fair vergleichen?“. Im Kontext von Trefferquoten bei Wurfwettbewerben (vgl. *Kasten 1*) wird die Frage als Kontextproblem wie folgt konkretisiert: „Wie kann ich Trefferhäufigkeiten bei unterschiedlichen Wurfzahlen fair vergleichen?“

Mit Hilfe der Aufgabe in *Kasten 1* nähern sich die Lernenden der Kernidee: „Um Häufigkeiten fair zu vergleichen, kann man sie absolut oder mit Bezug zur Gesamtzahl beschreiben. Für den zweiten Weg sind Anteile eine gute Beschreibung.“

## Erkunden: Wie kann ich Häufigkeiten fair vergleichen?

### 1 Wer hat besser geworfen: Jungen oder Mädchen?

Im Sportunterricht sind die Mädchen und die Jungen in Kleingruppen gegeneinander angetreten. Das sind die Ergebnisse der Gruppen von Pia und Ole.



Station \ Anzahl der Treffer	Pias Team (4 Mädchen)	Oles Team (10 Jungen)
Papierkorbball	XXXX	XXXXXXXXXX
Ringe werfen	XX	XXXXXXXX
Schuh in Kreis werfen	X	XXXXXXXXXX

- Arbeite zunächst allein: Betrachte die Häufigkeiten in den Teams von Pia und Ole. Welches war die beste Station der Mädchen? Welches war die beste Station der Jungen? An welcher Station waren die Mädchen besser als die Jungen?
- Erklärt euch gegenseitig, wie ihr die Ergebnisse verglichen habt. Welche Vergleiche waren einfach? Was war an den anderen schwierig? Wie fair sind eure Vergleiche?

### 2 Wie kann man fairer vergleichen?

- Ole vergleicht mit diesen Streifen rechts. Zu welchem Ergebnis kommt er wohl, wer beim Papierkorbball besser ist?
- Warum zeichnet er die beiden Streifen gleich lang?



**Kasten 1:** Kontextproblem für das Erfinden von Vergleichen über Anteile (relative Häufigkeit) (aus Glade/Prediger/Schmidt 2012)

In erster Schülerformulierung lautete das bei Lisa etwa so: „Wir dürfen ja nicht nur auf die Treffer gucken, das wäre unfair, denn die Jungengruppe hatte mehr Versuche. Die Jungen hatten beim Papierkorbball die Hälfte, die Mädchen mehr als die Hälfte, also sind die Mädchen besser.“ (weitere abweichende Ideen von Lernenden, die hier auftreten können, werden in Prediger 2011 diskutiert).

Wer im ersten Zugriff die Anteile nicht selbst erfunden hat, wird mithilfe der Streifenbilder in Aufgabe 2 in *Kasten 1* in diese Richtung geführt. Diese Veranschaulichung zeigt die Grundidee,

die Gesamtzahl einzubeziehen, indem sie beide Trefferstreifen gleich lang macht. Paul erklärt die gleiche Länge der Streifen (letzte Frage in Aufgabe 2) so: „Wären die nicht gleich, hätten die Mädchen ja keine Chance.“ Die Idee der Normierung auf ein einheitliches Ganzes ist für Kinder der 5. Klasse zwar schwer auszudrücken, doch den Kindern gelingt es auf ihre Weise, wie zum Beispiel Barış in *Abb. 1*.

Warum zeichnet Ole die Streifen gleich lang?

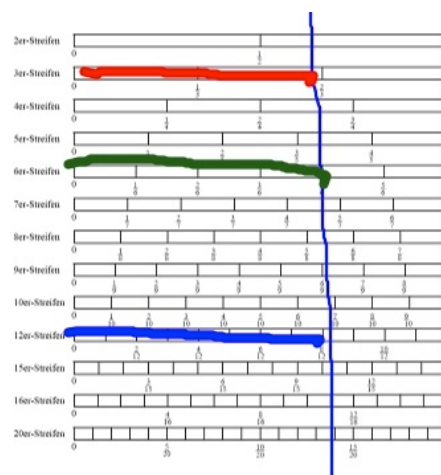
Damit man den Vergleich sieht und weil jeder Balken 100% ist.

*Abb. 1:* Barış antwortet auf die Frage in Kasten 1

### Beispiel „Gleichwertige Brüche finden“ – Horizontales und vertikales Mathematisieren

Darüber hinaus wird Oles Bild aus Aufgabe 2 in *Kasten 1* zum Ausgangspunkt für die Einführung der großen Streifentafel (siehe *Kopiervorlage 1*, und deren angedeutete Nutzung in *Abb. 2*). An diesem für die Brüche zentralen Anschauungsmittel können die Kinder viele Trefferquoten (aber auch abstrakte Brüche) vergleichen, gleichwertige Brüche finden und später auch Brüche addieren. Die Kernfrage, die im weiteren Unterrichtsgang auf gleichwertige Brüche führt, stellt sich als Kontextproblem so: „Wie finde ich gleich gute Trefferhäufigkeiten?“ Kennt man gleich gute Ergebnisse, kann man nämlich auch besser vergleichen.

Zum Finden gleich guter Ergebnisse stellt die Streifentafel als Anschauungsmittel die zentrale Hilfe zur horizontalen Mathematisierung dar. Mit ihr können die lebensweltlichen Trefferquoten so in eine mathematische (zunächst grafische) Form gebracht werden, dass die Mathematisierung über den Vergleich von Anteilen auf der Hand liegt (wie im Beispiel in *Abb. 2*).



*Abb. 2:* Streifentafel als Anschauungsmittel (*Kopiervorlage 1*)

Im weiteren Verlauf muss sich dann das Nachdenken über Anteile sowohl von dem Kontext der Trefferquoten ablösen als auch – im Zuge der Schematisierung (vgl. Glade/Schink 2011) – von dem Anschauungsmittel der Streifentafel, denn natürlich ist auch die kalkülhafte Bearbeitung des Themas wichtig. Diesen Prozess der vertikalen Mathematisierung stoßen wir mit folgendem Strukturproblem an: „Wie finde ich gleich große Anteile auch ohne Streifentafel, denn das ist immer so umständlich?“ In diesem Strukturproblem ist auch die generelle Idee der Kalkülisierung angesprochen, die Kinder hier mit folgender Kernidee erleben können: „Um nicht immer in Situationen oder Bildern etwas herauszufinden, ist es auch gut, Rechenwege zu kennen. Gleichwertige Brüche findet man durch erweitern und kürzen.“

Das Erweitern und Kürzen wird so nicht nur verstehensorientiert grundgelegt durch eine Grundvorstellung von der Gleichwertigkeit von Brüchen (Prediger 2006), sondern auch sinnstiftend auf zwei Ebenen erfahrbar:

1. Es ist als Abstraktion des eigenen Tuns an der Streifentafel begreifbar („Ich suche immer feinere Streifen. Wenn dabei aus jedem Kästchen zum Beispiel vier Kästchen werden, werden auch die angemalten Kästchen viermal so viel. Das ist genau das Erweitern mit vier.“)
2. Zudem dient dieser Gang dazu, den generellen Sinn von Schematisierungen zu erfassen: „So ist es weniger umständlich.“

Konstruktion von Sinn durch vertikale Mathematisierungsprozesse setzt also intensiv darauf, dass den Kindern der Schematisierungsprozess auch als solcher bewusst ist. Dies ist in einem stark lehrer geleiteten, kurztaktigen fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch allein selten zu erreichen, denn der Prozess muss *eigenständig vollzogen* und hinterher *gezielt reflektiert* werden, damit die Kinder diese Facette mathematischen Arbeitens tatsächlich als sinnstiftend erleben können.

### Brüche addieren – Authentizität als didaktisches Problem

Für das Addieren von Brüchen haben wir folgende Kernfrage formuliert: „Wie kann ich Anteile zusammenfassen?“. Dafür gibt es verschiedene lebensweltliche Anlässe, beispielsweise das Zusammenfassen von Gewinnchancen verschiedener (disjunkter) Ereignisse (z. B. in Emde u. a. 1999). Wir haben den Kontext der Anteile bei der Zeiteinteilung gewählt: Welchen Anteil meines Tages verbringe ich mit Pflichtterminen, wenn ich darunter Schultermine, Hausaufgaben und Vereine zusammenfasse? (vgl. *Kasten 2*).

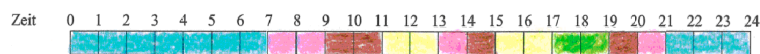
## Erkunden: Wie kann ich Anteile zusammenfassen?

### 7 Freizeitanteile zusammenfassen

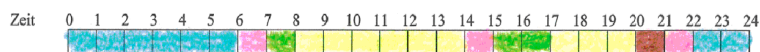
Till und Ole möchten einen Überblick, wie groß ihr Anteil an Freizeit eigentlich ist. Weil ein Tag 24 Stunden hat, tragen sie ihre Termine in den 24er-Streifen ein. Ist bei ihnen wirklich alles verplant?



Tagesstreifen von: Ole



Tagesstreifen von: Till



### Zu wenig Freizeit?

Spontan etwas unternehmen? Das geht bei vielen Kindern oft nicht, denn 90 % des Tages sind schon mit Terminen verplant.

Schule:

privates „Muss“:

privates „Kann“:

Essen, Waschen,

Anziehen:

Schlafen:



- Welche Anteile des Tages entfallen bei beiden auf Schule oder auf privates „Muss“? Lies weitere Anteile aus den Bildern ab.
- Fasse für Ole zusammen:
  - die Anteile des Tages für „Schule und privates Muss“
  - die Anteile des Tages für Schlafen und für Essen, Waschen und Anziehen. Welcher Anteil des Tages ist wirklich Freizeit für Ole?
- Ole und Till haben Anteile zusammengefasst und als Additionen von Brüchen geschrieben. Welche Rechnungen passen zu wessen Tagesstreifen?
- Erstelle einen Tagesstreifen für deine typischen Schultage und einen Tagesstreifen für deinen typischen Samstag. Schreibe mit den Anteilen Additionen und berechne sie.

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{24} = \frac{1}{6}$$

für Waschen/Anziehen und Essen

$$\frac{2}{24} + \frac{6}{24} = \frac{1}{3}$$

einfach verschlafen!

**Kasten 2:** Aufgabe zur Einführung der Bruchaddition (ähnlich in Glade/Prediger/Schmidt 2012)

Es bereitet Kindern erfahrungsgemäß relativ wenige Schwierigkeiten, die Aufgabe b) zu bearbeiten und Anteile intuitiv zusammenzufassen und somit eigenständig die Erfahrungsgrundlage für die Grundvorstellung der Addition von Brüchen als Zusammenfassen von Anteilen im Kontext zu erarbeiten.

Wenn allerdings nach dem konzeptuellen Wissen der Grundvorstellung auch das prozedurale Wissen des Rechenverfahrens erarbeitet werden soll, stößt dieses Kontextproblem ebenso wie alle anderen verfügbaren an vielschichtige Authentizitätsgrenzen: Der Kontext der Zeiteinteilung selbst

ist insofern authentisch, als die knapp bemessenen Freizeitanteile für viele Jugendliche ein relevantes Problem darstellen. Dies kann durch die Zeichnung eigener Tages- oder Wochenstreifens thematisiert werden. Die Übersetzung der lebensweltlichen und grafisch gestützten Tätigkeit des Zusammenfassens von Anteilen in die formale Schreibweise der Bruchaddition allerdings trägt zur Lösung lebensweltlicher Fragen nichts bei, daher kommt bereits hier die Authentizität an ihre Grenzen. In der Aufgabe in *Kasten 2* wird die Addition anders als die Gleichwertigkeit daher nicht erfunden, sondern in Teilaufgabe c) schlicht gesetzt. Durch die zuvor selbst erarbeiteten Erfahrungen im Zusammenfassen von Zeitanteilen kann die formale Beschreibung zumindest plausibel gemacht werden.

Spätestens jedoch, wenn das Standardverfahren des Gleichnamigmachens der Nenner erarbeitet werden soll, ist die Authentizität des Kontexts an der definitiven Grenze angelangt. Im Kontext der Zeiteinteilung stellt sich das Problem des ungleichen Nenners nicht, denn die Bezugsgröße 24 Stunden ist sowieso fest und die Zeiteinteilung kann auch in absoluten Zahlen gedacht werden. Wozu sollte man hier also erst gleichnamig machen? Wieso sollte man überhaupt in diesem Beispiel mit Anteilen rechnen statt einfach die absoluten Häufigkeiten zu addieren?

Zwar ist das Problem der Freizeitanteile kontextauthentisch und auch die daran zu stellende Frage ist motivierbar, jedoch ist die Passung der mathematischen Mittel (Addition von Brüchen durch Gleichnamigmachen) zur Frage nicht authentisch herzustellen. Während viele Kinder und viele Lehrkräfte dies durchaus aus Schulbüchern gewöhnt sind und nicht weiter schlimm finden („Hauptsache, sie beißen erstmal an, dafür reicht der Kontext.“), stellt aus unserer Sicht die fehlende Mittelauthentizität die Reichweite der horizontalen Mathematisierung als sinnstiftenden Zugang zum Gleichnamigmachen erheblich in Frage.

Wenn also die hier angedeuteten Kontexte für eine horizontale Mathematisierung nicht tragfähig genug sind, so muss man sich – im Sinne der didaktischen Phänomenologie Freudenthals (1983) – die Frage stellen, ob in anderen Kontexte authentische Probleme auf die Addition ungleichnamiger Brüche führen könnten. Natürlich findet man etwa beim Backen Situationen, bei denen Achtel, Viertel und Halbe zusammengefasst werden müssen, doch wo werden in diesem Kontext kompliziertere Brüche verwendet? Wann hätte man beim Backen einmal  $\frac{1}{3}$  Milch mit  $\frac{3}{4}$  Liter Wasser rechnerisch mischen müssen, statt sie einfach zusammenzuschütten?

Sobald mit komplizierteren Brüchen als Halbe, Viertel und Achtel gerechnet werden muss, finden sich in authentischen lebensweltlichen Situationen überwiegend Prozente oder Dezimalzahlen, aber keine komplizierteren Brüche. Im Rahmen der Entwicklung authentischer Kontextprobleme für die *mathewerkstatt* erreichten wir damit den ersten Unterrichtsabschnitt im Verlauf der Klasse 5/6, in dem lebensweltlich nicht mehr nützliche Inhalte gelernt werden sollen. Fast niemand braucht in seinem Alltag die Addition  $\frac{3}{5} + \frac{2}{14}$ , daher muss man für die Zielgruppe der Realschülerinnen und -schüler zumindest die Frage ernsthaft prüfen, inwieweit man das Addieren ungleichnamiger Brüche überhaupt unterrichten will. In vielen Bundesländern verlangt es der Lehrplan, nicht zuletzt um später in algebraischen Zusammenhängen auch Zwischenrechnungen bewältigen zu können – ein typischer, nicht unkritischer Fall von Lernen auf Vorrat. Die noch plausibelste Sinnstiftung bietet die innermathematische Systematisierungsfrage: Kann man eigentlich mit allen Brüchen so rechnen, oder geht das nur mit Vierundzwanzigsteln?

## Erkunden: Wie kann ich Anteile zusammenfassen?

### 8 Additionen in der Streifentafel

a) Löse die folgenden Aufgaben an der Streifentafel. Erkläre, wie du sie dazu benutzt.

$$1) \frac{8}{24} + \frac{6}{24} \quad 2) \frac{3}{24} + \frac{1}{6} \quad 3) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad 4) \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$$

Brauchst du immer den 24er-Streifen? Wie geht es einfacher?

b) Mit der Streifentafel kannst du noch andere Additionsaufgaben lösen. Meistens musst du dazu erst einen passenden feineren Streifen suchen. Sortiere diese Aufgaben nach schwer und leicht. Warum sind einige leichter?

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{24} + & & \frac{3}{8} + & & \frac{3}{4} + & & \frac{3}{7} + \\ \frac{3}{12} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{15} + & & \frac{1}{3} + & & \frac{4}{15} + & & \\ \frac{4}{15} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \end{array}$$

- c) Finde passende feinere Streifen und rechne die Ergebnisse aus.  
d) Denkt euch weitere leichte und schwere Additionsaufgaben aus, schreibt sie auf einen Zettel und auf die Rückseite das Ergebnis. Stellt euch die Aufgaben gegenseitig.



**Kasten 3:** *Eigenständige Erarbeitung des Gleichnamigmachens als vertikale Mathematisierung (aus Glade/Prediger/Schmidt 2012)*

### Brüche addieren – vertikales Mathematisieren

Daher wird der Kontext Zeiteinteilung im Schulbuch an dieser Stelle nicht weiter strapaziert, stattdessen erfolgt die Weiterarbeit am eingeführten Anschauungsmittel Streifentafel. Die Streifentafel haben die Kinder sich bereits so gut erarbeitet, dass sie nun zu eigenständigen Erkundungen in der Lage sind (vgl. *Kasten 3*). Konkret bedeutet dies, dass in der Streifentafel die einzelnen Anteile markiert und ihre Summe durch einen anderen Bruch der Streifentafel beschrieben werden soll. Bei der Suche nach dem geeigneten Streifen, in dem beide Anteile eingetragen werden können, hilft die Streifentafel durch eine erste Orientierung in Bezug auf qualitative Größenvorstellungen des Ergebnisses („ $1/3 + 1/5$ , das ist etwas mehr als  $1/2$ .“). Das Ergebnis passt aber weder in den 3er-Streifen, in den 5er-Streifen, noch in den 24-er-Streifen, mit dem die Schülerinnen und Schüler bislang hantiert haben. Es muss also ein neuer feinerer Streifen geschaffen werden. Hier machen sich die Schülerinnen und Schüler entweder am konkreten Anschauungsmittel Streifentafel auf den Weg oder gehen bereits zahlenorientiert die Dreier- und die Fünferreihe nach einer passenden Zahl durch, bis sie für sich ein Verfahren gefunden haben. (Z. B. „Ich suche die kleinste/eine Zahl, die für beide Brüche passt.“ oder „Ich nehme einfach 3 mal 5, das geht dann.“)

Die Ebenen der Sinnstiftung beim vertikalen Mathematisieren („Das ist Ergebnis meines Tuns“ und „Super, da es viel schneller geht.“) lassen sich hier wie oben finden. Das gewählte inhaltliche Vorgehen lässt sich durch seine Strukturgleichheit mit dem gefundenen Kalkül in der Rückschau reaktivieren.

### Brüche und ihre Operationen – ein facettenreiches Thema

Vergleichen, gleichwertige Brüche finden und addieren sind nur drei Beispiele aus der Vielzahl der Operationen, die für Brüche zu lernen sind. *Kasten 4* zeigt in einem zusammenfassenden (wenn auch nicht vollständigen) Überblick, welche verschiedenen Kontexte wir für die Erarbeitung der

Operationen jeweils gewählt haben. Zwar hätte vielleicht auch eine Erarbeitung aller Operationen am Pizzakontext genügend Situationen bereitgestellt, um alle wesentlichen Operationen zu illustrieren. Dann aber wäre zweierlei verlorengegangen: Die Authentizität der Kontextprobleme (Wieso sollte man zwei Pizzen durch  $\frac{3}{4}$  teilen?) und ein Einblick der Lernenden in die Vielfalt der Anwendungsbereiche der Bruchrechnung.

Umso entscheidender ist die intensive Vernetzung der jeweiligen Erfahrungen und Vorstellungen, die in den jeweiligen Kapiteln, aber auch in einem Kapitel „Zahlen systematisieren“ erfolgen.

<b>Kernfragen, Kontexte und genetische Probleme für das Brüche-Curriculum</b>		
<b>mathematischer Inhalt</b> Mathematisierungsrichtung	<b>Kernfrage und Kernidee</b>	<b>Kontext und Kontext- bzw. Strukturprobleme</b>
Brüche als Anteile  vorrangig horizontal	Wie kann ich beschreiben, wie viel jeder bekommt, wenn es beim Teilen nicht aufgeht? →Um zu beschreiben, wie viel jeder bekommt, wenn es beim Teilen nicht aufgeht, werden die Anteile durch Brüche beschrieben.	Essen und Trinken: Wie kann ich die gleichmäßige Verteilung von Pizza beschreiben durch Zahlen?
Brüche vergleichen  horizontal	Wie kann ich Häufigkeiten fair vergleichen? →Um Häufigkeiten fair zu vergleichen, kann man sie absolut oder mit Bezug zur Gesamtzahl beschreiben. Für das zweite sind Anteile eine gute Beschreibung.	Trefferquoten: Wie kann ich Trefferhäufigkeiten bei unterschiedlichen Wurfzahlen fair vergleichen?
gleichwertige Brüche finden  horizontal und vertikal	Wie finde ich gleich große Anteile? →Um nicht immer so umständlich in Situationen oder Bildern etwas herauszufinden, ist es auch gut, Rechenwege zu kennen. Gleichwertige Brüche findet man durch erweitern und kürzen.“	Trefferquoten: Wie finde ich gleich gute Trefferhäufigkeiten? Abstrahierend vom Kontext: Wie finde ich gleich große Anteile auch ohne Streifentafel, denn das ist so umständlich?
Brüche addieren  vorrangig vertikal	Wie kann ich Anteile zusammenfassen? →Um Anteile zusammenzusammen, kann ich die zugehörigen Brüche addieren	Zeiteinteilung: Welchen Anteil an meinem Tag verbringe ich mit Pflichtterminen, wenn ich Schultermine, Hausaufgaben und Vereine darunter zusammenfasse? Abstrahierend vom Kontext: Wie kann ich Anteile unabhängig vom Kontext zusammenfassen?
Brüche multiplizieren  horizontal und vertikal	Wie kann ich Anteile von Anteile berechnen? →Um Anteile von Anteile schnell zu bestimmen, kann ich Brüche multiplizieren	Statistiken über Kinder weltweit: Wie kann ich den Anteil der Schulabbrecher an den Erstklässlern auf alle Sechsjährigen beziehen? Abstrahierend vom Kontext: Wie kann ich Anteile von Anteilen, unabhängig vom Kontext, auch kalkülhaft bestimmen?

**Kasten 4:** Überblick zu Kontexten und Kernideen zur sinnstiftenden Erarbeitung ausgewählter Bruchoperationen

## Fazit

Wenn die Sinnstiftung aus Nützlichkeit in Kontexten ihre Grenzen erreicht, müssen sich Konzepte und Verfahren aus einer anderen Quelle speisen. Im Prozess der Mathematisierung wird der Sinn mathematischer Inhalte verstärkt im eigenen Handeln und der Genese der Konzepte und Verfahren gesucht. Dieser Ansatz geht nicht nur für horizontales Mathematisieren von lebensweltlichen Kontexten in die Mathematik hinein, sondern auch für vertikale Mathematisierungen, die abstrahierend vom Kontext das eigene Tun strukturieren, schematisieren und formalisieren. Vertikales Mathematisieren zur individuellen und kollektiven Sinnkonstruktion zu nutzen kann gelingen, wenn die Schülerinnen und Schüler im Unterricht den Raum erhalten

- zur Entwicklung eigener Ansätze am vertrauten oder neu erarbeiteten Material,
- zum Austausch untereinander,
- und damit: zur Weiterentwicklung der Ideen und entwickelten Verfahren im Dialog.

## Literatur

- Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Schneider, Claudia / Streit, Christine (2012): Essen und Trinken – Teilen und Zusammenfügen, erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin
- Emde, Christel u. a. (1999): Mathe live 6, Klett, Stuttgart
- Freudenthal, Hans (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht
- Freudenthal, Hans (1991): Revisiting Mathematics Education. China Lectures, Kluwer, Dordrecht
- Glade, Matthias / Prediger, Susanne / Schmidt, Ulla (2012): Freizeit von Mädchen und Jungen – Anteile vergleichen und zusammenfassen. Erscheint in: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin
- Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): Vom Anteil vom Anteil eigenständig zur Multiplikation von Brüchen – Das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung als Beitrag zum Systematisieren, **erscheint in** Mathematik lehren 162.
- Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, S. 4–8
- Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum-Verlag, Heidelberg.
- Prediger, Susanne (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. In: PM 48 (11), 8–12
- Prediger, Susanne (2011): Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Ausdifferenzierender Umgang mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten (**\*\*\*Arbeitstitel\*\*\***). Erscheint in PM 53(40)
- Prediger, Susanne / Schink, Andrea / Schneider, Claudia / Verschraegen, Jan (2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. Erscheint in: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin

## Adressen der Autorinnen und des Autors

Prof. Dr. Susanne Prediger  
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund  
prediger@math.uni-dortmund.de

Matthias Glade  
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund  
mglade@math.uni-dortmund.de

Ulla Schmidt  
Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Lünen  
ulla.schmidt@versanet.de

## Kopiervorlage 1

# Die große Streifentafel – ein Werkzeug für Brüche

Tipp: Lege die Streifentafel in eine Klarsichtfolie und schreibe darauf mit Folienstiften, dann kannst du sie mehrfach verwenden.

