

Systematisieren und sichern

Nachhaltig lernen durch aktives Ordnen

Susanne Prediger, Bärbel Barzel, Timo Leuders, Stephan Hußmann

Vorversion des Basisartikels aus *Mathematik lehren* 164 im Februar 2011

Zusammenfassung:

In den letzten Jahren ist viel Energie in die Entwicklung und Erprobung reichhaltiger, schüleraktivierender Erkundungen und produktiver Übungen gesteckt worden. Dagegen gibt es bislang wenige Vorschläge, wie das Systematisieren und Sichern sinnvoll gestaltet werden kann, so dass das Wissen und Können nachhaltig gelernt wird. Der Artikel zeigt verschiedene Möglichkeiten auf, wie diese Unterrichtsphase didaktisch gezielt je nach zu sicherndem Wissensselement gestaltet werden kann und nennt Gründe und Wege, diese Phase bewusst stärker in die Hand der Lernenden zu legen.

Was kommt nach dem Erkunden?

Erkunden und Üben, das stand in den letzten Jahren in der Didaktik im Vordergrund. Mit der Entwicklung reichhaltiger, schüleraktivierender Lernumgebungen zum Erkunden wurde Freudenthals (1983) alte Forderung zunehmend eingelöst, dass Lernende die zentralen mathematischen Konzepte, Zusammenhänge und Vorgehensweise anhand geeigneter Aufgabenstellungen eigenständig nacherfinden sollen. Auch die letzte Phase eines Lernprozesses, das Üben, hat seit Müller / Wittmann (1990) zunehmend didaktische Aufmerksamkeit erhalten, um sie so wirkungsvoll wie möglich zu gestalten.

Die entscheidende Unterrichtsphase zwischen dem Erkunden und dem Üben allerdings erscheint uns bisher zu wenig beachtet:

- Wie werden die unterschiedlichen individuellen, kontextgebundenen Ideen und Erfahrungen der Lernenden aus Erkundungsphasen in zusammenhängendes, konsolidiertes mathematisches Wissen und Können überführt, das im Einklang steht mit den existierenden Definitionen und Sätzen des Faches? (dies alles umfasst das *Systematisieren*)
- Und wie kann das konsolidierte Wissen und Können so gesichert werden, dass Lernende darauf langfristig zugreifen können? (dies ist das *Sichern*)

Nur wenige Arbeiten der letzten Jahre beschäftigen sich mit diesen Herausforderungen (Ausnahmen bilden Bruder 2001, Büchter/Leuders 2005), obwohl eine Unterrichtsphase des Systematisierens und Sicherns in jedem Unterricht in irgendeiner Form stattfindet. Wir nennen Systematisieren und Sichern zusammen das *Ordnen* und wollen im Folgenden ausführen, warum und wie es didaktisch gezielt gestaltet werden kann.

Warum ist das Ordnen wichtig?

Erfahrene Lehrkräfte wissen seit langem, warum Systematisieren und Sichern für den Lernprozess so wichtig sind:

- *Reflexionsbedarf*: Ein Aktionismus des Entdeckens und Erkundens ohne Sammeln und Systematisieren der Ideen und Erfahrungen hat keine nachhaltigen Erfolge, weil Erfahrungen nur dann zu Kenntnissen werden, wenn das Wissen und Können konsolidiert wird.
- *Regularisierungsbedarf*: Auch wenn individuelle Nacherfindungen einen zentralen Schritt im Lernprozess bilden, führen sie ohne Konfrontation mit dem regulären mathematischen Wissen nicht automatisch auf die überlieferten Begriffe und Sätze der Mathematik (Gallin/Ruf 1990 nennen diesen Schritt vom Singulären zum in der Wissenschaft Konsolidierten das *Regularisieren*).
- *Systematisierungsbedarf*: Allein einzelne Kenntnisse ohne eine systematisierende Einordnung führen nur auf isoliertes bruchstückhaftes Wissen.
- *Dokumentationsbedarf*: Zu einem Sichern gehört auch das Festhalten, dabei vor allem das Verschriftlichen des Systematisierten und Konsolidierten, das einerseits bewirkt, dass Gedanken ausgeschärft und präzisiert werden und auf das andererseits später zurückgegriffen werden kann.

Der klassische Ansatz zum Sichern des Gelernten ist das gute alte Merkheft oder der selbst angelegte Wissensspeicher (Brückner 1978), in dem alle wichtigen Sätze und Verfahren festgehalten werden. Auch wenn Merkhefte als ‚altbacken‘ in Verruf geraten sind, möchten wir hier ihre Ehre retten und gleichzeitig ihre Nutzung in zweierlei Hinsicht ausweiten:

- erstens hinsichtlich der Vielfalt der zu sichernden Wissensfacetten,
- zweitens im Grad der Beteiligung, die Lernende bei seinem Zustandekommen haben.

Was muss systematisiert und gesichert werden?

Natürlich sind Verfahren und Sätze in ihren expliziten Formulierungen zentrale Bestandteile mathematischen Wissens und Könnens, gleichwohl lernen Schülerinnen und Schüler sehr viel mehr, was sich zu sichern lohnt. Das Spektrum des Wissens, um das es in Mathematik geht, ist sehr weit. Es lassen sich verschiedene Arten von Wissen unterscheiden, die sich ihrerseits jedoch in verschiedenen Facetten zeigen (vgl. Kasten 1). Die Kategorien dieser Tabelle werden im nachfolgenden Text näher erläutert.

Welche Wissens Elemente müssen gesichert werden? Breites Repertoire im Überblick				
Was daran ? (Facette des Wissens)	Explizite Formulierungen	Konkretisierung und Abgrenzung	Bedeutungen und Vernetzung	Zugehörige konventionelle Festlegung
Was? (Art des Wissens)				
Konzeptuelles Wissen: Konzepte z.B. Zahlen, Operationen	Definitionen z.B. Definition eines Bruchs	Beispiele / Gegenbeispiele z.B. $\frac{2}{3}$ ist ein Bruch, 2 auch, aber 2 ist sogar natürlich	Vorstellungen / Darstellungen z.B. Bruch als Teil eines Ganzen, mit Bild	Fachwörter z.B. Namen wie Nenner, Zähler Bezeichnungskonventionen z.B. rechte Winkel markiert man durch einen Punkt
Konzeptuelles Wissen: Zusammenhänge z.B. Winkelsummensatz in Dreieck	Satz z.B. Formulierung des Winkelsummensatzes	Beispiele / Gegenbeispiele z.B. Wenn das Dreieck an einer Ecke nicht geschlossen ist, sind es auch keine 180° .	(vorzugsweise anschauliche) Begründung / Beweis	evtl. Namen der Sätze z.B. Name „Winkelsummensatz“, Bezeichnung der Winkel aber auch: konventionelle Regeln z.B. Punkt vor Strich Regel
Prozedurales Wissen: Mathematische Verfahren, Algorithmen z.B. Graphen zeichnen, Brüche addieren Dreisatz im Kopf	Anleitung z.B. Wie addiert man ungleichnamige Brüche in 3 Schritten? z.B. Wie zeichnet man einen Funktionsgraphen?	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle evtl. auch Fehlerwissen z.B. Beim Zeichnen von Graphen muss man auf die Skalierung der Achsen achten	Vorstellung / Begründung als Verknüpfung zu als konzeptuellen Gehalten z.B. So stellt man sich die Additionsschritte von Brüchen in Streifenbildern vor	Nicht begründbare Festlegungen z.B. Beim Zeichnen von Funktionsgraphen wird die x-Achse immer als die horizontale Achse genommen
Prozedurales Wissen: Handwerkliche Verfahren z.B. Winkel zeichnen Taschenrechner Heftführung	Anleitung z.B. So zeichnet man mit dem Geodreieck einen Winkel von 70° ...	Umsetzung der Anleitung, aber auch Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezifische Kniffe, Fehlerwissen z.B. Beim Zeichnen von Winkeln über 180° muss man achten auf...	(keine konzeptuellen Gehalte, nur Handwerk, daher keine Bedeutungen)	Nicht begründbare Festlegungen z.B. Im Heft immer Datum angeben die Taschenrechnertaste = heißt ENTER
Metakognitives Wissen: Strategien,..	...			
...				

Kasten 1

....die Arten des Wissens

Die grundlegende Unterscheidung zwischen *konzeptuellem* und *prozeduralem Wissen*, also dem Wissen über Fakten, Konzepte und Zusammenhänge einerseits und Handlungswissen andererseits, ist für jeglichen Unterricht eine hilfreiche Basisorientierung. Denn je nach Wissensart wird man unterschiedliches sichern.

Konzeptuelles Wissen ist Wissen über mathematische Konzepte und mathematische Zusammenhänge, das deklarativen Charakter hat, über das also meist verbal kommuniziert wird.

Als *Konzepte* begegnen den Lernenden etwa Zahlen oder Operationen, aber auch Eigenschaften (z.B. geometrischer oder algebraischer Natur) oder Relationen (z.B. senkrecht, ungerade), die ebenfalls in Definitionen explizit formuliert und konsolidiert werden können. Das Faktenwissen über konventionelle Bezeichnungen ist dabei nur ein nachgeordneter Aspekt deklarativen Wissens, wichtiger sind die Konzept an sich.

Das Gebäude mathematischen Wissens lebt jedoch nicht nur von Konzepten, sondern vor allem auch von den strukturellen und logischen *Zusammenhängen*, die sich zwischen den Konzepten ergeben. Ein mathematischer Satz ist die „Hochform“, in der solche Zusammenhänge zum Ausdruck gebracht werden. Im Unterricht begegnet den Lernenden etwa die Kommutativität von Operationen oder der Winkelsummensatz, bei denen neue Erkenntnisse aufgrund des vorherigen Wissens erschlossen und begründet werden können.

Prozedurales Wissen wird kurz auch als Handlungswissen oder „Können“ bezeichnet und bezieht sich im Mathematikunterricht zum einen auf *mathematische Verfahren und Algorithmen*, zum anderen auf *handwerkliche Verfahren* wie zum Beispiel den Umgang mit Zirkel und Lineal oder Taschenrechner.

Neben diesen Wissensarten erwerben Schülerinnen und Schüler auch *metakognitives Wissen*, wie Strategien des Problemlösens oder Meta-Wissen über Schritte des Modellierens als Hintergrundwissen für bewusstes Vorgehen. Diese Ebene wird in diesem Heft aus Gründen der notwendigen Beschränkung eher ausgeklammert.

...die Facetten des Wissens

Will man in einer Klasse den Begriff des Bruchs sichern, bleibt die Frage: Was genau daran? Die Fachvokabeln Zähler und Nenner sind sicherlich wichtig, aber nicht der Kern. Eine formale Definition? Abgrenzungswissen, was kein Bruch ist? Oder auch die zugehörigen Vorstellungen und Darstellungen?

Diese Entscheidungen sollte man als Lehrkraft systematisch treffen. Dabei hilft es, sich bewusst zu machen, dass für jede Wissensart unterschiedliche Wissensfacetten relevant sind, zwischen denen gezielt ausgewählt werden kann. Wir schlagen in den Spalten der Tabelle in Kasten 1 die folgenden Facetten als Unterscheidung vor:

- explizite Formulierung
- Konkretisierung und Abgrenzung
- Bedeutungen und Vernetzung
- zugehörige konventionelle Festlegung

Die *explizite Formulierung* ist für die Mathematik als Fachwissenschaft sicher die wichtigste Wissensfacette. Sie enthält konzentriert, korrekt und prägnant das Wesentliche des jeweiligen Wissens. Das sind – wie bereits genannt – beispielsweise Definitionen und Sätze beim konzeptuellen Wissen und Anleitungen bei mathematischen und handwerklichen Verfahren. Die Ebene der expliziten Formulierung ist allen Lehrenden aus dem Studium gut vertraut und ist auch vielfach die Sprache in Lexika und Schulbüchern und damit auch im Unterricht.

In Bezug auf Konzepte stellt Winter (1983) jedoch das *exemplarische* Begriffsverständnis dem explizit-definitiven voran, denn um ein mathematisches Konzept zu lernen, ist die Definition weniger wichtig als Beispiele und Gegenbeispiele. Bruder (2001) nennt daher das Identifizieren (d.h. für Beispiele entscheiden, ob sie zu einem Begriff gehören) und Realisieren (d.h. selbst geeignete Beispiele und Gegenbeispiele kennen) als die wichtigsten Aktivitäten zur Sicherung eines Konzepts. In ähnlicher Weise sind auch für die anderen Wissensarten die *Konkretisierung* in Beispielen und die *Abgrenzung*, wann dieses Wissens- oder Könnenselement nicht passt, entscheidende Facetten (vgl. auch Beispiel in Abb. 1 und Artikel von Prediger in diesem Heft).

Wenn Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren nicht nur formal erworben, sondern auch flexibel und verständlich genutzt werden sollen, müssen ihre *Bedeutungen* verstanden werden. Daher bilden inhaltliche Vorstellungen und passende Darstellungen ganz entscheidende Wissensfacetten (vom Hofe 1995, Prediger 2009), die ebenfalls systematisiert und gesichert werden müssen.

Sind inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen verfügbar, so lassen sich auch *Zusammenhänge* zu anderen Wissensselementen knüpfen, etwa durch anschauliche Begründung von Sätzen oder Verfahren. Die Bedeutungen der Wissensselemente innerhalb und außerhalb der Mathematik und auch die Vernetzung mit anderen Wissensbereichen ist maßgeblich für Verstehen und für die Kompetenz des Übertragens, Nutzens und Anwendens des jeweiligen Wissens. Nur wenn man erfasst hat, wozu das neu Gelernte dienlich ist, welche Vorstellungen und Ideen damit verbunden sind, wie man das Wissen darstellen und kommunizieren kann, nur dann kann das Wissen zu eigen gemacht, verinnerlicht und mit dem existierenden Wissensnetz verbunden werden.

Bei der Sicherung von Wissen im Unterricht stehen manchmal statt des inhaltlichen Gehalts der Wissensselemente nur die *zugehörigen Konventionen* im Mittelpunkt. Das geschieht zum Beispiel dann, wenn in Klasse 5 die Fachwörter für Multiplikation und Division gelernt werden, ohne sicherzustellen, dass alle Kinder dazu auch die adäquaten Vorstellungen erworben haben (dann wird der Begriff mit seinem Bezeichner verwechselt), oder wenn die Einübung konventioneller Schreibweisen für Zusammenhänge zentraler sind als die Einsicht in ihre Bedeutungen. Natürlich müssen auch Konventionen erworben und gesichert werden, aber zentral sind die expliziten Formulierungen, Konkretisierungen und Abgrenzungen sowie Bedeutungen und Zusammenhänge. Erst auf dieser Basis werden zugehörige Konventionen relevant. Wir führen in der Tabelle die Konventionen als eigenständige Wissensfacette auf, um sie gezielt von den anderen Facetten unterscheiden zu können.

Ineinandergreifen der Wissensselemente in einem Beispiel

Dass in einer konkreten Systematisierungs- und Sicherungsphase im Unterricht meist mehrere Wissensselemente kombiniert werden müssen, zeigen wir exemplarisch an einer Ordnenaufgabe aus dem Schulbuch *mathewerkstatt* in Abb. 1. Die Kinder haben zuvor in Erkundungsaufgaben versucht, Quader zu basteln und dabei erfahren, dass diese nicht genau werden, wenn man nicht auf die genaue Lage der Kanten zueinander achtet. Auf diese Erfahrung wird nun die Systematisierung der Konzepte senkrecht und parallel aufgebaut.

Ordnen B

► Materialbuch 5.9
Wissenspeicher
Linien

► Materialbuch 5.7
Linien

Wie kann man Körperformen möglichst genau herstellen?

2 **Schiefe und gerade Verpackungen**

Beim genauen Basteln dürfen die Ecken und Kanten im Rechteck nicht schief sein.

Damit die Verpackung möglichst gut aussieht, sollten die Faltkanten im Bastelbogen wie beim Rechteck verlaufen. Davon spricht auch Merve. In den Ecken sollen die Kanten *senkrecht* zueinander sein. Gegenüberliegende Kanten sollen *parallel* zueinander sein.

a) Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen? Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu?

b) Welche der Aussagen stimmen für parallele Linien, welche für senkrechte Linien?

(1) Die Linien haben überall denselben Abstand zueinander. (4) Man kann rechte Winkel zwischen die beiden Linien legen.

(2) Eine Linie kann man entlang der anderen auf sich selbst falten. (5) Eine der beiden Linien muss waagrecht sein.

(3) Die Linien dürfen nicht schräg über das Blatt verlaufen. (6) Die beiden Linien schneiden sich nie.

(7) Beide Linien stehen zu einer dritten Linie senkrecht.

c) Mit welchen zwei Aussagen aus b) kann man am besten beschreiben, wann zwei Linien senkrecht sind? Welche zwei Aussagen beschreiben parallele Linien am besten?

d) Vergleicht eure Lösungen aus a) und c) und übertrag sie in den Wissenspeicher.

Übrigens: So kann man den rechten Winkel zwischen zwei senkrechten Linien kennzeichnen.

Abb. 1: Beispiel einer Ordnenaufgabe aus Barzel / Glade / Prediger / Schmidt 2011

Der Vorspanntext beginnt mit der schlichten Mitteilung der konventionellen Namen der implizit erarbeiteten Konzepte. Teilaufgabe a) zielt auf die Wissensfacette der *Konkretisierung und Abgrenzung*, indem sie Beispiele zuordnen lässt. Dabei sind insbesondere auch typische Fehlvorstellungen thematisiert: (1) und (4) würden Kinder als nicht passend identifizieren, die die Konzepte nur Kantennparallel verstehen. In Teilaufgabe b) werden explizite Charakterisierungen angeboten, von denen in c) je eine zur *expliziten Definition* ausgewählt wird. Gleichzeitig wird auch hier *Abgrenzungswissen* dadurch gesichert, dass typisch falsche Aussagen mit angeboten werden. So werden in einer Aufgabe verschiedene Wissensfacetten abgedeckt. Die Technik zum exakten Zeichnen senkrechter Linien dagegen zielt auf eine gänzlich andere Wissensart und wird in einer eigenen Aufgabe behandelt.

Wie gestalte ich die Phase des Systematisierens und Sicherens?

Insgesamt zeigt Kasten 1 für jede Wissensart mehrere Wissensfacetten, wir nennen die einzelnen Zellen der Tabelle Wissens Elemente. Es ist ein zentraler Akt der Unterrichtsvorbereitung, sich für jeden einzelnen Lerninhalt explizit zu entscheiden, welche Wissens Elemente systematisiert und gesichert werden sollen (vgl. 1. Schritt in Kasten 2). In jedem Fall ist von Neuem zu entscheiden, welche Elemente an der jeweiligen Stelle des Lernprozesses relevant sind und welche erst später oder vielleicht gar nicht bedeutsam sind. Nur die wichtigsten unter denen, die weiter gebraucht werden, sollten im Hefteintrag gesichert werden (2. Schritt im Kasten 2).

Schritte der Planung einer Phase des Systematisierens und Sicherens

1. Welche Wissens Elemente sollen zu dem Inhalt systematisiert und gesichert werden? Z.B.
 - Nur Konkretisierungen und Abgrenzungen, oder auch explizite Formulierungen?
 - Welche Bedeutungen und Zusammenhänge sollten explizit gesichert werden?
 - Auf welche Konventionen muss man achten?
2. Wie soll der gesicherte Hefteintrag (zum Beispiel im Wissensspeicher) am Ende aussehen?
 - Welche Wissensfacetten sollen im Hefteintrag explizit festgehalten werden?
 - Welche Gestaltung des fertigen Hefteintrags ist für die Lernenden später einmal nützlich?
3. In welcher Weise sollen und können die Lernenden bei der Erstellung des Eintrags aktiv tätig werden? (Wir nennen dies „Aneignungshandlungen“)
 - Welcher Grad an Lernendenbeteiligung und Konvergenz (s. Abb. 2) ist für die ausgewählten Wissens Elemente möglich und wichtig?
 - Wie komplex sind die expliziten Formulierungen, was können Lernende davon allein bewältigen?
 - Welche Vorstellungen und Darstellungen haben die Lernenden längst entwickelt und können sie formulieren, wo brauchen sie Konvergenz und Unterstützung durch das Aufgabenformat (z.B. durch bloßes Zuordnen)?
4. Welche Unterrichtsformen und -methoden passen zu den ausgewählten Aneignungshandlungen? Z.B.
 - Was kann in Einzelarbeit erfolgen, wo ist Kommunikation mit anderen Lernenden oder der ganzen Klasse sinnvoll oder sogar erforderlich?
 - Welche Schritte muss ich als Lehrkraft explizit kontrollieren, um sicher zu gehen, dass nichts Falsches festgehalten wird?

Kasten 2: Schritte der Planung

Sicherung im Spektrum zwischen selbst Finden und nur Nachvollziehen

Ein einfaches Beispiel: Wie bestimmt man relative Anteile, z.B. 25 / 27 von 540? Nachdem dieses Problem in einem sinnstiftenden Kontext erkundet und eigenständig an Beispielen gelöst wurde, muss das Verfahren systematisch aufgeschrieben und damit gesichert werden (zur Einbettung dieser Aktivitäten des Ordners in einen gesamten Unterrichtsgang siehe Leuders/Hußmann/Barzel/Prediger 2011 und das Beispiel der Flächen in der mathe-welt in diesem Heft).

Überspitzt formuliert kann der Unterricht dabei zwei extreme Wege gehen: In dem einen Extremfall wird das Buch aufgeschlagen und der rote Kasten gelesen und ins Heft abgeschrieben. Den Lernenden bleibt dann nur, das Vorgegebene nachzuvollziehen. Im anderen Extremfall bekommen die Lernenden den Auftrag, völlig eigenständig eine Anleitung für das Verfahren aufzuschreiben, ohne jegliche weitere Unterstützung. Dass sie dabei etwas Richtiges zu Papier bringen, ist dann nur durch individuelle Korrektur jedes Formulierungsversuches zu garantieren.

Beide Wege bergen Gefahren in sich. Der Weg mit dem hohen Grad an Konvergenz, wenn das Gesicherte zielsicher im Lehrervortrag oder im roten Kasten vorgegeben wird, muss der Gefahr begegnen, dass die Schülerinnen und Schüler das sich das Wissen nur oberflächlich aneignen oder dass sich ihnen der Sinn des Wissenserwerbs nicht erschließt.

Natürlich sind rote Kästen für die Sicherung wichtig, doch sind sie auch in den meisten Schulbüchern als Endprodukte eines durch die Lehrkraft moderierten gemeinsamen Prozesses gemeint, nicht als Ersatz für diesen. Der andere extreme Weg, geprägt durch einen hohen Grad an Schülerbeteiligung lebt mit der Gefahr, dass viel zu viel Zeit in den Prozess fließt und dass Unsicherheiten aufkommen – bei Lehrenden und Lernenden, da man „nicht mehr weiß, was richtig und falsch ist“.

Viele Lehrkräfte versuchen daher, zwischen diesen Extremen des nur noch Nachvollziehens und des kompletten Selbstfindens einen Mittelweg zu gehen. Die Herausforderung dabei ist, dass einerseits nicht zu viel Zeit und Mühe auf individuelle Irrwege verwendet wird, andererseits aber die Lernenden so weit aktiv an dem Prozess des Systematisierens und Sicherns beteiligt werden, dass das zu sichernde Wissensselement nicht nur im Heft, sondern auch in den Köpfen ankommt. So bleibt das Wissen dort längerfristig aktivierbar.

Ein naheliegende Variante eines solchen Mittelwegs ist zum Beispiel, erste Formulierungsversuche allein machen zu lassen, die aber dann gemeinsam im Unterrichtsgespräch besprochen werden. Dieses Gespräch wird von der Lehrperson moderiert und gelenkt mit dem Ziel einer gemeinsamen endgültigen Formulierung. Diese Variante bietet wiederum viele weitere Zwischenstufen mit Aktivitäten, die das Spektrum zwischen selbst Finden und Nachvollziehen füllen, etwa die gemeinsame Arbeit an halb geeigneten Lösungen einzelner Lernender oder die Weiterarbeit ausgehend von vorstrukturierten Teilgedanken.

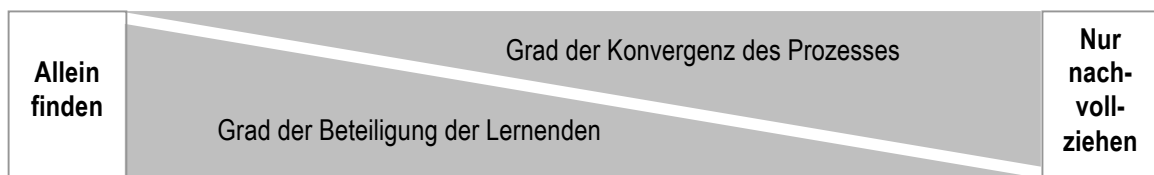


Abb. 2: Gegenseitige Abhängigkeiten im breiten Spektrum

Gleich welcher Weg gewählt wird, wichtig ist, dass es bewusste Handlungen gibt, die gezielt dazu dienen, dass sich die Lernenden das neue Wissen aneignen – sogenannte „Aneignungshandlungen“. Geht es zum Beispiel um Aneignungshandlungen zum expliziten Formulieren, so kann man das Spektrum nach dem Grad der Beteiligung der Lernenden und umgekehrt dem Grad der Konvergenz des Prozesses exemplarisch durch folgende kognitive Aktivitäten aufzeigen:

1. Formulierungen allein finden
2. unfertige Formulierungen ergänzen oder abwandeln
3. Formulierungen Beispielen zuordnen oder in eine systematische Reihenfolge bringen (für Anleitungen)
4. erklären, warum fertige Formulierung passend ist
5. fertige Formulierung nachvollziehen und mit Beispielen konkretisieren

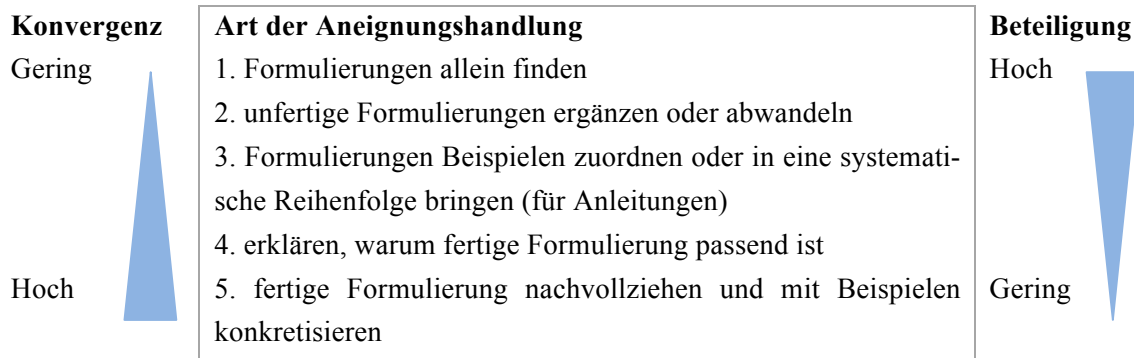


Abb. 2 : *Spektrum der Aneignungshandlungen zu expliziten Formulierungen*

Dabei ist der skizzierte Weg von der freien Formulierung zur gemeinsamen Verengung nur eine unter vielen Möglichkeiten, der den Grad der Lernendenbeteiligung nur so weit einschränkt wie unbedingt nötig. Aber auch die Lehrperson, die relativ konvergent beginnt, muss Aneignungshandlungen in den Lernprozess integrieren, damit das zu sichernde Wissensselement vom Heft auch in den Kopf kommt. Natürlich entfällt dann Punkt 1 „Formulierungen alleine finden“, doch die folgenden vier Punkte können als Aneignungshandlungen in einem anschließenden Übungsteil integriert werden. Zu bemerken ist, dass bei der fünften Aktivität eine neue Wissensfacette angeschnitten wird, die der Konkretisierung (vgl. *Kasten 1*).

Statt den Prozess der Systematisierung über mehrere Stufen hinweg zu gestalten, kann man auch gleich auf einer Zwischenstufe einsetzen. *Abb. 3* zeigt zum Beispiel einen Weg mit vorstrukturiertem Wissensspeicher (aus Prediger / Schink / Schneider / Verschraegen 2012), bei dessen Bearbeitung die Aneignungshandlung auf das Ergänzen unfertiger Formulierungen und auf das Konkretisieren durch Beispiele beschränkt ist.

□

So berechnet man den Teil, wenn Anteil und Ganzes gegeben sind

	So berechnet man $\frac{25}{27}$ von 540:	Mein Beispiel:
1. Schritt: Leichtere Aufgabe mit Zähler 1 rechnen	Erst rechne ich $\frac{1}{27}$ von 540, und zwar so:	
2. Schritt: Hochrechnen auf größeren Zähler	Nun rechne ich auf $\frac{25}{27}$ hoch, und zwar so:	

Abb. 3: *Beispiel für einen vorstrukturierten Wissensspeicher zur Aneignungshandlung „unfertige Formulierungen ergänzen“*

Die hier geschilderten Prinzipien für die Schritte des Systematisierens und Sicherens beim Wissenserwerb tragen den lernpsychologischen Anforderungen an die Effektivität des Lernens in zweierlei Hinsicht Rechnung: (1) Wissenserwerb benötigt aktive Aneignungsprozesse, (2) Aktivität allein reicht

jedoch nicht, sie muss durch geeignete Lernarrangements auf die wesentlichen Wissensselemente fokussiert werden. (Atkinson & Renkl 2007)

Vielfalt der Aneignungshandlungen in einem Beispiel

Es liegt auf der Hand, dass die Wahl der Aneignungshandlungen mit jeder Wissensfacette neu getroffen werden muss. Dies ist auch an dem Beispiel der Konzepte parallel und senkrecht in Abb. 1 nachvollziehbar:

Auf die Erfahrung der schiefen Quader aus dem Erkunden wird zwar in der Ordnenaufgabe angeknüpft, dies wird aber nicht dauerhaft festgehalten, denn das konsolidierte Wissen zu den Konzepten parallel und senkrecht sollte davon unabhängig sein. Konventionen können nicht eigenständig erarbeitet werden, deswegen werden die Namen der Konzepte im Vorspanntext schlicht *mitgeteilt*. Die individuelle Aneignung der Namen erfolgt über die weitere Arbeit mit ihnen. Die Aneignungshandlung der Wissensfacette *Konkretisierung und Abgrenzung* ist die des *Identifizierens*. Zwar wäre auch realisieren möglich gewesen, doch sind so die typischen Fehlvorstellungen besser einzubauen. Erst nach dieser Konkretisierung werden in Teilaufgabe b) explizite Charakterisierungen angeboten, von denen in c) je einer zur *expliziten Definition* ausgewählt wird. Da Kinder die expliziten Definitionen in Klasse 5 noch sehr schwer selbst finden, beschränkt sich hier die Aneignungshandlung auf *Passung erklären*.

Spektren möglicher Aneignungshandlungen für alle Wissensselemente

Was hier exemplarisch für die explizite Formulierung von Verfahren aufgezeigt wurde, gilt analog für alle andere Wissensarten und –facetten auch: Stets gibt es zwischen dem kompletten Alleinfinden und dem ausschließlichen Nachvollziehen sinnvolle Zwischenstufen mit konvergenteren, aber doch die Lernenden beteiligenden Aneignungshandlungen. Wir haben diese Stufungen in Kasten 3 für jedes Wissensselement aus Kasten 1 exemplarisch angedeutet, wenn auch ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Einige dieser Aneignungshandlungen sind wohlbewährt, zum Beispiel das Zuordnen von Darstellungen (vgl. Swan 2005, Büchter/Leuders 2005), andere haben wir neu (nach?)erfunden.

Für jedes einzelne zu sichernde Wissensselement muss eine Entscheidung getroffen werden, wie der Grad an Beteiligung mit dem Grad an Konvergenz für diesen Spezialfall angemessen auszubalancieren ist. Dieser 3. Schritt aus *Kasten 2* hängt ab von der gewählten Sozialform, der Komplexität des Wissensselements und von der Zeit, die für den jeweiligen Sicherungsschritt investiert werden soll. Zudem soll in mittelfristiger Perspektive eine gewisse Ausgewogenheit angestrebt werden.

Aneignungshandlungen für Wissens Elemente im Spektrum zwischen selbst Finden und Nachvollziehen

Was daran ? (Facette des Was? Wissens) (Art des Wissens)	Explizite Formulierungen	Konkretisierung und Abgrenzung	Bedeutungen und Vernetzung	Zugehörige konven- tionelle Festlegung
Konzeptuelles Wissens: Konzepte	<ul style="list-style-type: none"> - Formulierung für Definitionen/ Satz allein finden - Unfertige Formulierung ergänzen oder abwandeln: Paula hat es so geschrieben, was stimmt daran noch nicht? Verändere die Formulierung. - Passung erklären: Inwiefern kann man so das Konzept beschreiben? - Fertige Formulierung nachvollziehen und konkretisieren 	<ul style="list-style-type: none"> - Realisieren des Konzepts /Satzes: Finde Beispiele und Gegenbeispiele und erkläre, wieso sie (nicht) passen. - Identifizieren des Konzepts: Welches dieser Beispiele passt zum Konzept, welche nicht? Wieso? - Für gegebene Beispiele (Nicht-) Passung begründen: Inwiefern ist dies ein Gegenbeispiel? Wieso? 	<ul style="list-style-type: none"> - Eigenständig interpretieren: Finde eigene Bilder (Darstellungen) und Situationen (Vorstellungen) zu diesem formalen Ausdruck (Term, Rechnung etc.) und erkläre, wieso sie passen - Eigenständig sortieren mit eigenen Kriterien: Welche dieser Beispiele / Bilder / Situationen gehören zusammen? - Zuordnen: Ordne diese formalen Ausdrücke, Bilder (Darstellungen) und Situationen (Vorstellungen) einander zu und erkläre, wieso sie zusammen gehören 	<ul style="list-style-type: none"> - Selbst Konvention erfinden - Selbst Konvention aus Liste von Möglichkeiten festlegen: Suche aus dieser Liste möglicher Fachwörter eins aus, das am besten passt - Konvention nachvollziehen hinsichtlich Adäquatheit, In der Mathematik nennt man es so, erkläre, wieso der Name passt - Konvention nutzen: Nutze die Bezeichnungskonvention in deinem Beispiel
Konzeptuelles Wissen: Zusammen- hänge			<ul style="list-style-type: none"> - (Vorzugsweise anschauliche) Begründung für den Satz selbst finden und formulieren - Am gegebenen Bild / Beispiel Begründung für den Satz formulieren 	<ul style="list-style-type: none"> - Konvention nutzen: Nutze die Bezeichnungskonvention in deinem Beispiel
Prozedurales Wissen: Mathematische Verfahren, Algorithmen	<ul style="list-style-type: none"> - Formulierung für Anleitung allein finden - Unfertige Formulierungen ergänzen oder abwandeln - Formulierung für Schritte Beispielen zuordnen oder in eine systematische Reihenfolge bringen 	<ul style="list-style-type: none"> - Falsche Ausführungen der Verfahren und Algorithmen prüfen und korrigieren - verschiedene Verfahren vergleichen, um Bedingungen der Anwendbarkeit abzuleiten - Realisieren der Anleitung am eigenen Beispiel - Anleitung auf Spezialfälle ausweiten - Identifizieren, in welchen Beispielen die Anleitung nutzbar ist (und evtl. Kriterien formulieren) 	<ul style="list-style-type: none"> - Gegebene falsche und richtige Begründungsbausteine auswählen oder in Reihenfolge bringen - Gegebene Begründungsbausteine gegebenen Bildern zuordnen 	<ul style="list-style-type: none"> zusätzlich für konventionelle Regeln: - Fehlersuche: Beispiele / Gegenbeispiele finden, die die Regel erfüllen oder nicht
Prozedurales Wissen: Handwerkliche Verfahren	<ul style="list-style-type: none"> - Fertige Formulierung nachvollziehen und konkretisieren 		(Wissenselement für Methoden nicht relevant, da ohne konzeptuellen Gehalt)	

Kasten 3: Aneignungshandlungen für unterschiedliche Wissens Elemente im Spektrum zwischen Nachvollziehen und Selbst entwickeln

Wie kann das konkret im Unterricht umgesetzt werden?

Natürlich macht die Festlegung geeigneter Wissensselemente und Aneignungshandlungen allein noch keinen Unterricht. Die konkrete methodische Gestaltung muss im 4. Schritt aus Kasten 2 konkret geplant werden: Welche Unterrichtsformen und -methoden passen zu den ausgewählten Aneignungshandlungen? So muss jeweils konkret geplant werden, was in Einzel- oder Partnerarbeit erfolgen kann, und wo Kommunikation mit anderen Lernenden oder der ganzen Klasse sinnvoll oder sogar erforderlich ist. Natürlich muss auch bei aktiver Beteiligung der Lernenden stets im Auge behalten werden, welche Schritte die Lehrkraft explizit kontrollieren muss, um sicher zu gehen, dass nichts Falsches festgehalten wird. Zum Beispiel halten wir den Auftrag der Teilaufgabe d) in Abb. 1 für wichtig, weil keine individuellen Überlegungen unkontrolliert in den Wissensspeicher übernommen werden sollten. Ob die Identifizierungs-, Zuordnungs-, und / oder Beispiel-Begründungs-Handlungen nun in Einzel-Partnerarbeit, im Klassengespräch, mit Ich-Du-Wir-Methode oder im Rahmen einer Strategiekonferenz vollzogen werden, wird man sich in der Unterrichtsvorbereitung stets auch in Abhängigkeit von Schwierigkeitsgrad, Stand der Klasse und verfügbarer Zeit überlegen. Wie wichtig diese methodischen Überlegungen sind, wollen wir im Heft damit unterstreichen, dass wir dem Repertoire an methodischen Möglichkeiten ausführliche Beiträge widmen.

Fazit: In der Hand der Lernenden, ohne zu überfordern

Am Ende dieser Aufgaben haben auch Lernende, die deutlich aktiver einbezogen sind in die Sicherungsprozesse, ihren „roten Kasten“ im Wissensspeicher. Die Chance, dass er auch im Kopf angekommen ist, ist durch die eigene Arbeit an seiner Erstellung jedoch gewachsen. Unsere Erfahrung im Projekt Kosima ist, dass mit solch gezielt ausgewählten Zwischenstufen es viel häufiger gelingt, die Schülerinnen und Schüler aktiv am Ordnen zu beteiligen ohne sie zu überfordern, weil die gezielten Aneignungshandlungen auf einer angemessenen Zwischenstufe in die eigenständige Arbeit integriert werden können, bevor eine gemeinsame Besprechung des Erarbeiteten erfolgt.

Anmerkung: Alle Autorinnen und Autoren haben an diesem Beitrag gleichberechtigt mitgewirkt.

Literatur

- Atkinson, R. K., & Renkl, A. (Hrsg.) (2007). Interactive learning environments: Contemporary issues and trends (Special Issue). *Educational Psychology Review*, 19, 235-399.
- Barzel, Bärbel / Glade, Matthias / Prediger, Susanne / Schmidt, Ulla (2011): Verpackungen – Körperformen beschreiben, herstellen, zeichnen, erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin 2012, Vorabdruck 2011.
- Bruder, Regina (2001): Mathematik lernen und behalten. In: *Pädagogik* 53 (10), 15-18.
- Brückner, Hubert (1978): Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7, in: *Mathematik in der Schule* 16(6), S. 310-316.
- Büchter, Andreas / Leuders, Timo (2005): Sammeln, Sichern, Systematisieren. In: dies.: *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen*, Cornelsen Scriptor, Berlin, 136-139.
- Gallin, Peter / Ruf, Urs (1990): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*, Kallmeyer-sche Verlagsbuchhandlung, Seelze
- Leuders, Timo / Hußmann, Stephan / Barzel, Bärbel / Prediger, Susanne (Hrsg.) (2011): *Das macht Sinn. Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 37.
- Prediger, Susanne (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*, Beltz, Weinheim, 213-234.
- Prediger, Susanne / Schink, Andrea / Schneider, Claudia / Verschragen, Jan (2012): *Kinder weltweit – Anteile in Statistiken*, erscheint in: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): *mathewerkstatt 6*. Cornelsen, Berlin.
- Swan, Malcolm (2005): *Standards Unit. Improving learning in mathematics: challenges and strategies*, University of Nottingham.
- vom Hofe, Rudolf (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*, Spektrum, Heidelberg.

- Wittmann, Erich C. / Müller Gerhard N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Klett, Stuttgart.
- Winter, Heinrich (1983b): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), 175-204.