Vorabdruck des Beitrags in Höttecke, Dietmar (Hrsg.): Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden 2009, LIT-Verlag, Berlin, 6-20.

Susanne Prediger

Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts (TU Dortmund)

„Aber wie sag ich es mathematisch?" – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt

Mathematik bietet eine formale Sprache zur Erfassung und Beschreibung realer (z.B. naturwissenschaftlicher) Phänomene und Zusammenhänge. Trotz oder gerade wegen der dadurch erreichbaren Ökonomie von Beschreibungen ist ihr Erwerb und ihre verständige Anwendung für Lernende eine große Herausforderung. In diesem Beitrag sollen zentrale empirische Befunde aus der Mathematikdidaktik zu typischen Herausforderungen beim Nutzen dieser Sprachmittel vorgestellt werden, die auch Wege weisen zu konstruktiven Ansätzen für die Entwicklung von Lernarrangements zur Förderung von Mathematisierungs- und Interpretationskompetenzen.

Dass dieses Thema auch für die Naturwissenschaftsdidaktiken relevant ist, zeigt sich bereits an den Bildungsstandards Physik 10, in denen im Kompetenzbereich Erkenntnisgewinnung unter anderem gefordert wird: „Die Schülerinnen und Schüler …. (E1) beschreiben Phänomene und führen sie auf bekannte physikalische Zusammenhänge zurück, … (E4) wenden einfache Formen der *Mathematisierung* an, (E5) nehmen einfache *Idealisierungen* vor, … (E9) werten gewonnene Daten aus, ggf. auch durch einfache *Mathematisierungen*" (KMK, 2004, S. 11, Hervorhebung eingefügt).
Mathematisieren ist eine zentrale Tätigkeit, bei der Mathematik als (entweder rein begriffliches oder auch quantifizierendes) Mittel zur Beschreibung von Welt verstanden wird. Sie spielt nicht nur in den Naturwissenschaften, sondern in vielen Lebensbereichen eine Rolle (vgl. Freudenthal, 1983). Daher ist ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht gegenüber rein kalkülmäßigem Rechnen immer wieder betont worden (z.B. Borneleit et al., 2001).

Modellierungskreislauf als theoretisches Konstrukt zur Beschreibung von Modellierungsprozessen

In den gegenwärtigen Diskursen zur Unterrichtsentwicklung spielen komplexe, reichhaltige Modellierungsaufgaben eine große Rolle (zur Begründung s. vorletzter Abschnitt). Die dabei auftretenden Mathematisierungsanforderungen sind vielschichtig, die wichtigsten lassen sich jedoch auch schon an elementaren Schulbuch-Textaufgaben verdeutlichen. Zur einfachen Konkretisierung der kognitiven Anforderungen wird hier folgende schlichte Aufgabe herangezogen, ohne diese hinsichtlich ihres Grades an Realitätsrelevanz zu werten:

Aufgabe: Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden, ein Flamingo etwa 200 cm. Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?

Um die kognitive Aktivitäten zu strukturieren, die zur Lösung einer solchen (ebenso wie komplexerer) Aufgabe erforderlich sind, hat sich in der Mathematikdidaktik der Modellierungskreislauf bewährt (ursprünglich Pollack, 1979), der heute in unterschiedlichen Varianten betrachtet wird (vgl. Borromeo Ferri, 2006, für einen sorgfältigen Vergleich). Eine Variante (nach vom Hofe et al., 2006) ist in Abb. 1 abgedruckt, sie wurde um das Situationsmodell ergänzt. Entlang des Modellierungskreislaufs können die notwendigen kognitiven Aktivitäten bei der Lösung der Graupapagei-Aufgabe wie folgt beschrieben werden:

- Ausgangspunkt für das Lösen einer realitätsbezogenen Aufgabe ist die im Text beschriebene *Situation*, die zunächst von Lernenden strukturiert werden muss (*Situationsmodell*). Dies geschieht im elementaren Beispiel der Graupapageiaufgabe etwa dadurch, dass die Frage als Aufforderung zum multiplikativen Vergleich begriffen oder umstrukturiert wird in die Frage „Wie oft passt der Papagei in den Flamingo?".
- Um das Situationsmodell nun durch Ausdrücke wie 40 · ? = 200 oder 200 : 40 *mathematisieren* zu können (*Modell*), müssen geeignete Operationen ausgewählt werden. Dazu ist die *Grundvorstellung* (erläutert im übernächsten Abschnitt) des multiplikativen Vergleichs für die Multiplikation bzw. die des Passen-in für die Division zu aktivieren.

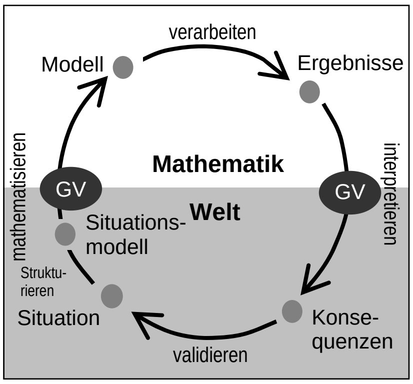

Abb. 1: Modellierungskreislauf

- Eine *innermathematische Verarbeitung* erfolgt in dieser arithmetischen Aufgabe rein durch Ausrechnen.
- Das Ergebnis „5" wird schließlich im Sachkontext *interpretiert* (*Konsequenzen*) und *validiert:* „Kann das wirklich stimmen, dass der Flamingo fünf Mal so groß ist? Ja!". Ist das Ergebnis der Validierung negativ, z.B. weil „wie viel mal größer" nur auf die Differenz bezogen werden könnte, werden einzelne Schritte überprüft und variiert oder die Modellierung erneut angesetzt.

Der so exemplifizierte Modellierungskreislauf (bzw. ausdifferenzierte Varianten) gilt als breit akzeptierte strukturelle Grundlage für vielfältige didaktische Aufgaben und Zwecke:
- *präskriptiv* für Kompetenzformulierungen in Bildungsstandards und Lehrplänen,
- *konstruktiv* zur Aufgabenformulierung und Lernumgebungskonstruktion,
- *diagnostisch* zum Erfassen von generellen Hürden und individuellen Teilkompetenzen,
- *als Lerninhalt*, denn Bewusstheit über den Modellierungskreislauf kann Entwicklung von Mathematisierungskompetenz fördern.

Gleichwohl sind viele wichtige Fragen bisher nur ansatzweise geklärt:
- Wie gehen Lernende bei Mathematisierungen im Detail vor?
- Wie gegenstandsspezifisch ist Mathematisierungskompetenz?
- Wie lassen sich kognitive Voraussetzungen für Mathematisierungen nachhaltig fördern?

Diese Fragen werden im Folgenden entlang der Analyse eines Fallbeispiels diskutiert, an dem einige zentrale empirische Befunde aus verschiedenen quantitativen und qualitativen Studien zu Lernständen und Arbeitsprozessen konzentriert verdeutlicht werden können.

Typische Muster in Modellierungsprozessen von Lernenden – dargestellt entlang des Fallbeispiels „Anton und der Graupapagei"

Die Roh-Daten zum Fallbeispiel „Anton und der Graupapagei" entstammen einer Interviewstudie aus einer von der Autorin betreuten Masterarbeit mit Kindern im Übergang von Klasse 4 zu 5 (Renk, 2009). Die Graupapagei-Aufgabe war die sechste Textaufgabe, die der zehnjährige Anton im klinischen Interview bearbeitete. Die Kinder wurden gebeten, laut zu denken, die Interviewerin gab Impulse zur Weiterarbeit und zur Explizierung der Denkwege.

Alle individuellen Modellierungsprozesse wurden videographiert, transkribiert und für diesen Beitrag neu analysiert hinsichtlich fünf typischer Bearbeitungsmuster in Modellierungsprozessen.

Szene A: Beginn

0	A	*[liest Aufgabentext vor]*
1	A	Da… *[5 sec Pause]* 40 mal 200…
2	I	Wie kommst du da drauf?
3	A	*[4 sec Pause]* Nee. Oder da würd' ich, oder da, oder 40 geteilt durch 200.

1. Muster: Sinnentleertes Kombinieren von Zahlen ohne Situationsmodell und Validierung
Anton beginnt die Bearbeitung der Aufgabe nach einem oft vorfindbaren Bearbeitungsmuster (Verschaffel et al., 2000): Die Zahlen aus dem Aufgabentext werden miteinander kombiniert, ohne dem Aufgabenkontext und der Auswahl der Operationen viel Beachtung zu schenken.
Zahlreiche empirische Untersuchungen haben dieses Bearbeitungsmuster dokumentiert, auch in extremen Fällen, in denen die Aufgabe keinerlei Sinn macht (sogenannte Kapitänsaufgaben, vgl. Baruk, 1985). Auffällig ist die oft ausbleibende gedankliche Konstruktion eines Situationsmodells und die fehlende Validierung. Sie werden je nach theoretischem Hintergrund unterschiedlich erklärt, entweder als kognitive Prozessdefizite oder als unterrichtlich antrainierter Umgang mit eingekleideten Aufgaben (vgl. Prediger, 2009c, für die theorieabhängige Vielfalt der wissenschaftlichen Deutungen).

Szene B: Anton beim Ergänzen

3	A	*[4 sec Pause]* Nee. Oder da würd' ich, oder da, oder 40 geteilt durch 200.
4	A	*[ohne Pause]* Da muss ich mal eben gucken. Warte…
5	I	Ja, überleg' ruhig.
6	A	*[überlegt 16 sec]* Also 160, also 1,60 m ist der größer, der Flamingo. Das weiß ich. Ich kann mir das ja mal merken. *[schreibt 160 auf]*
7	I	Genau, schreib' das mal auf.
8	A	Und das hab' ich jetzt gerechnet in… Also ich hab jetzt ergänzt.
9	I	Mhm.
10	A	Wie macht man das Ergänzt-Zeichen?

2. Muster: Individuelle Konstruktionen von Situationsmodellen
Im Gegensatz zu den zuvor zitierten Befunden validiert Anton seine in Zeile 1 und 3 formulierten Modellierungsansätze eigenständig und verwirft sie (Z. 4). Die danach verwendete Vorgehensweise des Ergänzens (Z. 6/8) deutet auf eine implizit vollzogene Strukturierung der Situation durch ein additives statt multiplikatives Situationsmodell hin, denn er untersucht den Abstand beider Tiere statt eines multiplikativen Vergleichs.
Hier zeigt sich exemplarisch, dass das *Bilden eines Situationsmodells* nicht nur das Weglassen von Informationen erfordert (vgl. „Idealisierung“ in E5 der Bildungsstandards Physik, KMK, 2004), sondern eine eigenständige, (ggf. kreative), kognitive Tätigkeit des *Strukturierens* als *Strukturen-Hinein-Sehens,* die z.T. idiosynkratisch ausgefüllt wird (Schwarzkopf, 2007).

3. Muster: Bearbeitung auf individuellen Wegen im Kreislauf
Anton formuliert im ersten Schritt jedoch nicht sein Situationsmodell, sondern liefert nach längeren (stillen) Überlegungen direkt (in Z. 6) das Ergebnis. Erst danach sucht er das zugehörige mathematische Modell (Z. 8ff), vermutlich, weil er nach fünf bereits bearbeiteten Aufgaben weiß, dass die Interviewerin auch die Rechnung erfragen wird. Diese *Variation*

der Reihenfolge der Prozessschritte steht exemplarisch für ein drittes oft vorfindbares Bearbeitungsmuster, das sich auch im weiteren Ablauf des Prozesses wiederholt (Z. 20ff, s.u.). Die Verschlungenheit von Antons Weg durch den Modellierungskreislauf ist für die Zeilen 1-18 des Transkripts in Abb. 2 angedeutet.

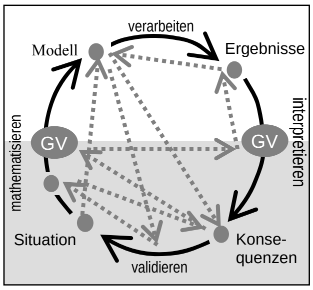

Abb. 2: Individuelle Wege

Auch andere Untersuchungen zeigen, dass die *individuellen Wege bei Modellierungsprozessen* (nicht nur von Kindern) häufig nicht der idealtypischen Chronologie folgen (z.B. Borromeo Ferri, 2006). Der Modellierungskreislauf ist daher nur als strukturelles, *nicht als chronologisches Modell* für Modellierungsprozesse zu verstehen.

4. Muster: Rückgriff auf informelles Können statt auf formale Beschreibungen
In vielen individuellen Modellierungsprozessen stellen die Übersetzungsschritte Mathematisieren und Interpretieren die zentralen Herausforderungen dar (Galbraith & Stillman, 2006; vom Hofe et al., 2006). Dies zeigt sich auch bei Anton, der zwar über genügend informelles Können verfügt, um den Abstand zwischen 40 und 200 zu bestimmen und sein Vorgehen sogar zu benennen („ich hab jetzt ergänzt", Z. 8), es dennoch aber nicht mathematisieren kann. Dies macht er in Zeile 10 in prägnanter Weise explizit: „Wie macht man das Ergänzt-Zeichen?"
Auch andere Untersuchungen zeigen immer wieder, dass bei vielen Lernenden das *informelle, lebensweltliche Können sicherer ausgeprägt* ist als die Kompetenz, ihre Vorgehensweisen mit der formalen Sprache der Mathematik in Verbindung zu bringen. Gleichzeitig zeigt sich hier eine vorunterrichtliche Ressource der Lernenden, einige Probleme auch ohne Mathematisierung informell lösen zu können. Sie ist in vielen Beispielen dokumentiert (z.B. Nunes et al., 1993).

5. Muster: Fehlende Aktivierbarkeit geeigneter Grundvorstellungen
Die Mathematisierung des Vorgehens setzt dagegen voraus, diejenigen mathematischen Konzepte (Operationen, Begriffe, ...) identifizieren zu können, mit denen die jeweilige Struktur oder Vorgehensweise erfasst werden kann. Ein so verstandenes *Übersetzungsscharnier* zwischen Mathematik und Lebenswelt wird in der Mathematikdidaktik als *Grundvorstellung* bezeichnet (siehe nächster Abschnitt). Anton etwa kann hier nicht die Grundvorstellung des Subtrahierens als Ergänzen aktivieren. Aufgrund der Ressource seines informellen Könnens hindert ihn dies in diesem Fall nicht am Lösen der Aufgabe, bei komplexeren Aufgaben ist dies anders.

Die Szene entwickelt sich mit den gleichen Bearbeitungsmustern weiter:

11	I	Entweder, du kannst durch plus irgendwie aufschreiben…
12	A	Ok, kann ich ja… *[schreibt 40+60+100=160 cm auf und spricht mit]*

Auf den Hinweis der Interviewerin hin formuliert Anton eine falsche mathematische Gleichung, vermutlich weil er einerseits den Impuls „durch plus" (Z. 11) aufgreifen will, andererseits jedoch von einer typischen individuellen Vorstellung zum Gleichheitszeichens ausgeht: links stehen die bekannten Zahlen und rechts das Ergebnis. Nach dem Hinweis (in der hier nicht abgedruckten Zeile 13), dass die erste Gleichung nicht stimmt, korrigiert er zu „40+60+100=200". Da diese korrigierte Gleichung jedoch nicht zu seiner Vorstellung vom Gleichheitszeichen passt, ergänzt er eine zweite Gleichung: „200-40=160" (Z. 16). In Bezug auf sein individuelles, auf Abstand fokussierendes additives Situationsmodell hat er die Aufgabe damit bewältigt (Z. 18), wie er durch Senken der Stimme und Schließen des Stiftes auch signalisiert. Der nächste Impuls der Interviewerin zielt auf Validierung und Revision des Situationsmodells:

Szene C: Anton beim Multiplizieren

19	I	Mhm. Und die Frage war aber „Wie viel MAL größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?“ Wie könntest du das jetzt rausbekommen?
20	A	Ähm, also Moment *[überlegt 21 sec, rechnet mit Fingern Malreihe hoch]* Da hab' ich jetzt 5 raus.
21	I	Mhm.
22	A	Also 5.
23	I	Wie hast du das gerechnet?
24	A	Da hab' ich jetzt… *[…]* Da hab' ich jetzt 40 mal 40 gerechnet. *[schreibt 40 • 40 auf]*

Die Interviewerin initiiert (in Z. 19) die erneute Betrachtung der Aufgabe mit verändertem Situationsmodell (Reaktion auf *2. Muster*). Wiederum bestimmt Anton die Lösung ausgehend von einem implizit bleibenden Situationsmodell, bevor er über das mathematische Modell nachdenkt *(3. und 4. Muster).* Erneut tut er sich schwer mit der Mathematisierung, weil er sein Vorgehen (Wie oft passt die 40 in die 200? - gelöst durch fortgesetztes Aufaddieren) nicht auf Anhieb in einer geeigneten Malaufgabe formalisieren kann. Die zugehörigen Grundvorstellungen (Passen-in als Dividieren und Dividieren als Umkehrung des Multiplizierens) kann er in diesem Moment noch nicht aktivieren. Im weiteren Verlauf gelingt ihm dies, wenn auch mit Hilfe der Interviewerin.
Auch die auf diese Szene folgende Herausforderung, die Rechnung durch eine Division zu beschreiben, gelingt erst nach einigem Überlegen (insgesamt dauert die Sequenz 12 min). Dabei ist sich Anton der Beziehungen zwischen den Grundrechenarten und ihren Bedeutungen keineswegs sicher, erneut wird also das *5. Muster* relevant, dessen Hintergründen der folgende Abschnitt gewidmet ist.

Für weitere typische Muster in Bearbeitungsprozessen sei auf Galbraith & Stillman (2006), Blum et al. (2007) und Borromeo Ferri (2006) verwiesen.

Grundvorstellungen – ein fachdidaktisches Konstrukt zur Erfassung der Gegenstandsspezifität von Mathematisierungskompetenz

Wie gegenstandsspezifisch ist Mathematisierungskompetenz?
In Bildungsstandards und Lehrplänen werden die oben aufgeführten Teilaktivitäten des Mathematisierens (Strukturieren, Mathematisieren, Interpretieren, Validieren) im Kompetenzbereich Modellieren als *allgemeine, prozessbezogene Kompetenzen* konzeptualisiert und gleichberechtigt, aber relativ unverbunden neben die inhaltsbezogenen Kompetenzen gestellt. In dieser Konzeptualisierung werden sie als gegenstandsübergreifende Kompetenzen verstanden und empirisch beforscht, ohne das Ineinandergreifen mit den einzelnen mathematischen Gegenständen im Kompetenzmodell zu erfassen. Während es gute Gründe gibt zu vermuten, dass die Kompetenz Validieren tatsächlich gegenstandsübergreifend aufgebaut werden kann (vgl. Verschaffel et al., 2000), erfordern die Übersetzungsaktivitäten Mathematisieren und Interpretieren aber immer auch gegenstandsspezifische Wissenselemente, die für jedes mathematische Themengebiet extra gelernt werden müssen. Sie können als „Übersetzungsscharniere“ bezeichnet und untersucht werden.

Diese gegenstandsspezifischen „Übersetzungsscharniere“ werden in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik mit dem Konstrukt der Grundvorstellungen gefasst (vom Hofe, 1995; Blum et al., 2004; Prediger, 2009b), im englischsprachigen Raum - nahezu bedeutungs-

gleich - als (mental) models (Fischbein, 1989; Usiskin, 1991). Models bzw. Grundvorstellungen bezeichnen inhaltliche Interpretationen mathematischer Konzepte (d.h. Begriffe, Operationen etc.), die ermöglichen, diese Konzepte zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu interpretieren (in Abb. 1 des Modellierungskreislaufs verortet und durch „GV" abgekürzt).
Das folgende Beispiel zur qualitativen Analysis zeigt, dass sich das Konstrukt der Grundvorstellungen nicht nur auf Grundrechenarten beziehen lässt:

Beispiel Neuverschuldung

„Neuverschuldung soll sinken", titelte der Weser-Kurier (am 30.6.2006) und erläuterte „Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren." Nahe liegt hier das Missverständnis, die Schulden und somit die Zinszahlungen seien geringer als vorher, wenn die Neuverschuldung sinkt. Mathematische Begriffe können helfen um zu verdeutlichen, dass - entgegen dieses Missverständnisses - der Rückgang der Neuverschuldung nicht zu geringeren Zinsen, sondern nur zu einem langsameren Anstieg derselben führt. Entscheidend ist dazu das Argument, dass man zwischen einer *Bestands- und einer Änderungsfunktion* unterscheiden muss (vgl. Abb. 3). Die innermathematische Erfahrung, dass meist gilt $f \neq f'$, kann jedoch nur zur Argumentation heranziehen, wer geeignete Übersetzungsscharniere für die Ableitung aktivieren kann. Wer dagegen nur über die geometrische Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung verfügt, wird keinen Bezug der analytischen Begriffe zur lebensweltlichen Situation sehen. Erforderlich ist hier also die Grundvorstellung von f' als lokaler Änderungsfunktion zur Bestandsfunktion f (mehr zu dem Beispiel und zur vorstellungsorientierten Analysis in Hahn & Prediger, 2008).

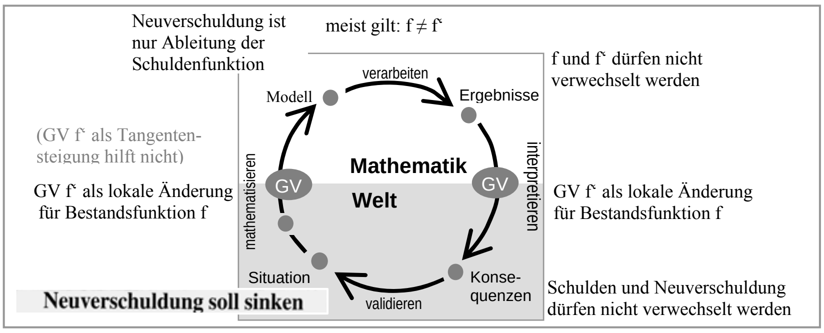

Abb. 3: Mathematische Begriffe nutzen zur Aufklärung von Missverständnissen

Konstrukt der Grundvorstellungen ermöglicht strukturbezogene Erklärung der Situiertheit von Mathematisierungsperformanzen

Wer in einer Situation mit einem mathematischen Konzept umgehen kann, kann es in der nächsten noch lange nicht. Diese Erfahrungen könnten, im Einklang mit der allgemeinen Diskussion um die Situiertheit von Wissen und Können (Greeno, 1998 u.v.a.), als Kontextspezifität von Mathematisierungskompetenz gedeutet werden. Das Konstrukt Grundvorstellungen ermöglicht jedoch, die Situiertheit von Mathematisierungsperformanz *strukturbezogen* (statt mittels Kontextspezifität) zu erklären, wie im Folgenden an den beiden Beispielen dieses Beitrags erläutert werden soll.

Mit dem Konstrukt der Grundvorstellung können spezifische Denkstrukturen beschrieben werden, die durch ein mathematisches Konzept erfassbar sind. Im Beispiel der Neuverschuldung ist diese Denkstruktur die Beziehung zwischen einer Bestands- und einer Änderungsfunktion, die durch das mathematische Konzept der Ableitung einer Funktion gefasst werden kann. Eine geometrische Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung hätte hier dagegen nicht geholfen. Wer aber an Wachstumsprozesse denkt und die Ableitung als Änderungsrate interpretieren kann, hätte die gleiche Denkstruktur und somit eine übertragbare Situationsvorstellung aktiviert. Grundvorstellungen zielen auf die Mathematisierbarkeit des strukturellen Kerns einer Situation. Sie sind losgelöst vom konkreten Kontext und daher übertragbar auf strukturell gleiche andere Kontexte (wie hier z.B. ein Bakterienwachstum).

Anton aus dem ersten Fallbeispiel hat vor Beginn der hier geschilderten Szenen bereits Textaufgaben erfolgreich mathematisiert, die der Grundvorstellung des Subtrahierens als Wegnehmen bedürfen. In Szene B kann er zwar den strukturellen Kern seiner (auf Abstand fokussierten) Situationsstrukturierung identifizieren und seine Aufgabe durch Ergänzen informell lösen, seine Frage, „Wie macht man das Ergänzt-Zeichen?" (Z. 10) zeigt jedoch, dass er die Grundvorstellungen des Subtrahierens als Ergänzen in dem Moment nicht aktivieren kann und deswegen keine eigenständige Übersetzung in mathematische Sprache findet.

Um ein mathematisches Konzept zur Mathematisierung nutzen zu können, muss man die lokale Bedeutung des Konzepts aktivieren können, die zu der Struktur der Situation passt. Diese lokale Bedeutung wird als Grundvorstellung (bzw. model) bezeichnet (vom Hofe, 1995; Usiskin, 1991). Dass Lernende einige Situationen mathematisieren können, andere nicht, kann damit zu tun haben, dass unterschiedliche Grundvorstellungen des mathematischen Konzepts notwendig sein können, zum Beispiel Subtrahieren als Ergänzen oder Wegnehmen, Brüche als Anteile oder Verhältnisse, Ableitung als Tangentensteigung und Änderungsrate usw.

Grundvorstellungen als präskriptives Konstrukt in der Curriculumsentwicklung

Da also der verständige und flexible Umgang mit mathematischen Konzepten (Begriffen, Operationen, …) beim Mathematisieren und beim inhaltlichen Denken (s.u.) von der Verfügbarkeit der relevanten Grundvorstellungen zu den jeweiligen Konzepten abhängt, ist der gezielte Aufbau vielfältiger Grundvorstellungen ein zentrales präskriptives didaktisches Prinzip, das Berücksichtigung in jedem mathematischen Themengebiet finden sollte (Borneleit et al., 2001; vom Hofe, 1995; Prediger, 2009b u.v.m.).

Es ist daher eine entscheidende Aufgabe der Curriculumsentwicklung (z.B. für Lehrpläne und Schulbücher), für jedes Themengebiet und jedes mathematische Konzept einen Katalog derjenigen Grundvorstellungen zu spezifizieren und in die Lehrgänge zu integrieren, die für die Grundbildung aller Lernender unabdingbar sind. Diese typisch fachdidaktische Aufgabe ist zwar bei weitem noch nicht flächendeckend umgesetzt, doch gibt es überzeugende Beispiele für aufgearbeitete Teilbereiche (z.B. Malle, 2004 und van Galen et al., 2008 für Brüche; Danckwerts & Vogel, 2006 für Analysis oder Jordan, 2006 zusammenfassend für verschiedene Bereiche der Mittelstufenmathematik). Solche Grundvorstellungskataloge entfalten als präskriptive Orientierungen auch für Schulbuchentwicklung und Unterrichtspraxis zunehmend Wirkung.

Grundvorstellungen als aufgabendiagnostisches Konstrukt

Nicht nur im präskriptiven, auch im deskriptiven kann das Konstrukt der Grundvorstellungen instruktiv genutzt werden, und zwar auf mindestens vier Weisen, für die jeweils kurz Beispiele angegeben werden sollen:

1. *Theoriegeleitete Zusammenstellung diagnostischer Tests* zur Verfügbarkeit notwendiger bereichsspezifischer Wissenselemente für eine flexible Mathematisierungskompetenz von Lernenden in einem Themenbereich.

Item:	Erfinde zu der Rechnung $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ eine passende Textaufgabe.	
Antwort-Kategorie (mit Häufigkeiten)	**Code mit Erläuterung und Scan typischer Antworten**	**Häufig-keiten** (n=830)
Antworten ohne inhaltliche Deutungsversuche (66 %)	Code Nb - nicht bearbeitet	30 % 251
	Code W - Weiß nicht, verstehe ich nicht Mir ist nichts eingefallen, Ich weiß kein Beispiel für Mal aufgaben im Buch.	20 % 163
	Code K - Antworten zum Kalkül ohne inhaltliche Deutung Uschi rechnet $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ in der Schule / Der Lehrer sagte ist richtig	16 % 134
Falsche Interpretationen (26 %)	Code A - additive Grundvorstellung → Oma Müller bringt zum backen eine 250 g Tüte Mehl mit die noch zu $\frac{2}{3}$ voll ist. Ihre Tochter hat noch eine Tüte die zu $\frac{1}{4}$ voll ist.	19 % 154
	Code F - sonstige falsche Interpretationen $\frac{2}{3}$ Leute bringen $\frac{1}{4}$ Freunde mit auf eine Party wie viele sind dann dort?	7 % 60
Spuren tragfähiger Interpretation (4 %)	Code M - Mal – ein Viertel mal so viel Wenn Herr Müller ein viertel vom Wasserglas ausgefüllt hat, und das zwei drittel mal, wie viele Gläser sind das insgesammt.	3 % 21
	Code Vf - nicht ganz richtige Von-Deutungen $\frac{2}{3}$ der Schüler in der Klasse spielen ein Instrument oder treiben einen Sport. Davon machen $\frac{1}{4}$ zwei Sachen. Wie viele freizeitliche Aktivitäten macht die Klasse zusammen.	1 % 9
Tragfähige Interpretation (5 %)	Code V - Von-Deutung Lena hat eine Aufgabe bekommen. Sie soll $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ l Milch errechnen. Was kommt dabei raus. Schreibe es in einen Bruch.	4 % 30
	Code S - Sonstige richtige Interpretationen (inkl. Flächen) Du willst einen Kuchen backen und hast $\frac{2}{3}$ vom Mehl. Diese Menge ist allerdings für 4 Kuchen berechnet. Berechne den Anteil von Mehl für 1 Kuchen	1 % 8

Abb. 4: Welche Vorstellungen haben Lernende vom Multiplizieren von Brüchen?

Dazu wird die Auswahl von Textaufgaben rund um ein mathematisches Konzept oder einen Bereich theoriegeleitet an dem zuvor spezifizierten Katalog relevanter Grundvorstellungen orientiert (z.B. Jordan, 2006; vom Hofe et al. 2006). In einem Test zur Multiplikation von Brüchen (Prediger, 2009a) waren dies etwa die Grundvorstellungen des Multiplizierens als wiederholtes Hinzufügen, als Skalieren, als Anteil-nehmen-von, als Rechtecksfläche und beim Umgang mit als Quotienten verbundenen Größen (wie Kilo und Kilopreise). Auch Items zur reinen Operationsauswahl im Multiple-Choice-Format mit Begründungen (wie in Abb. 5) geben hier interessante Aufschlüsse über die unterschiedliche Verfügbarkeit der Grundvorstellungen.

2. *Offenere Erhebung* der dominanten individuellen Vorstellungen zu einem Konzept
   Besonders aufschlussreich ist auch die Umkehrung des Itemformats, bei dem zu gegebenem mathematischen Modell eine Textaufgabe zu finden ist. Die Beispiele in Abb. 4 zeigen, was ein solches Format an tragfähigen und weniger tragfähigen individuellen Interpretationen mathematischer Inhalte ans Licht bringen kann. Im Test (aus Prediger, 2009a) gelang es nur 5 % der getesteten 830 Siebt- und Neuntklässler aller Schulformen, für eine gegebene Multiplikation von Brüchen eine richtige Textaufgabe zu formulieren.

3. Prädiktoren zur *bereichs**spezifischen** Vorhersage von Aufgabenschwierigkeit* bei Mathematisierungsaufgaben
   Über den Grad der Vertrautheit mit einer Grundvorstellung bzw. die Notwendigkeit zu ihrer Revidierung bei der Erreichung höherer Lernstufen lassen sich theoretisch begründbare bereichsspezifische Prädiktoren für Aufgabenschwierigkeiten von Textaufgaben ableiten und empirisch nachweisen. So müssen zum Beispiel einige Grundvorstellungen zur Multiplikation beim Übergang von den natürlichen zu rationalen Zahlen revidiert werden (wie die Vorstellung des fortgesetzten Hinzufügens, die bei zwei nicht natürlichen Faktoren nicht mehr trägt oder die des Anteilnehmens-von, das nur für Brüche trägt), andere sind kontinuierlich weiter entwickelbar von den natürlichen Zahlen auf die Brüche (wie das Skalieren oder die Rechtecksfläche). In Prediger (2009a) konnte gezeigt werden, dass die in diesem Sinne diskontinuierlichen Grundvorstellungen der Multiplikation von Brüchen den Lernenden größere Schwierigkeiten bereiten als kontinuierliche. Dies gibt Anlass, die theoretischen und empirischen Betrachtungen zum Conceptual Change (Posner et al., 1982, für Mathematik Vosniadou &Verschaffel, 2004) bei mathematischen Themen auch auf die Ebene der Grundvorstellungen zu beziehen (Prediger, 2008).

4. Prädiktoren zur *bereichs**übergreifenden** Vorhersage von Aufgabenschwierigkeit* bei Mathematisierungsaufgaben
   Blum et al. (2004, S. 155) konnten in einer vertieften Analyse der PISA2000-Daten zeigen, dass bei dem Aufgabentypus der außermathematischen rechnerischen Items die Komplexität der geforderten Grundvorstellungen auch bereichsübergreifend ein entscheidendes schwierigkeitsgenerierendes Merkmal darstellt: In ihrem testtheoretischen Modell lässt sich die Lösungshäufigkeit einer Aufgabe durch das bereichsübergreifende Konstrukt der Grundvorstellungsintensität erklären. Demnach wurden Aufgaben, die erweiterte Grundvorstellungen oder Kombinationen elementarer Grundvorstellungen erfordern, seltener gelöst als Aufgaben mit elementaren Grundvorstellungen.

Unschärfen des Konstrukts Grundvorstellungen für kognitive Analysen

Das Konstrukt der Grundvorstellungen hat sich aus den genannten Gründen sehr bewährt als semantisches Vergleichsmuster für Fehleranalysen bei Übersetzungsprozessen. Für kognitive Analysen der individuellen Denkvorgänge bei Übersetzungsprozessen ist es allerdings dennoch zu unscharf, weil es nicht auf eine Diagnose der Denkvorgänge zielt, sondern lediglich auf eine Diagnose der Struktur der zu mathematisierenden Situationen.
Wenn zum Beispiel in einem schriftlichen Test (aus Prediger, 2009a) nur 114 von 830 Lernenden bei der in Abb. 5 abgedruckten Aufgabe die Multiplikation wählen, so kann man diagnostizieren, dass die meisten Lernenden die Grundvorstellung der Multiplikation von Brüchen als Anteilnehmen-von nicht aktivieren konnten. Was die Lernenden bei der Auswahl der Operation wirklich gedacht haben, ist damit jedoch nicht geklärt, auch nicht für jene, die richtig gewählt haben, denen also bescheinigt werden kann, über die Grundvorstellung zu verfügen.

Aufgabe:
a.) Mit welcher Rechnung kann man $\frac{2}{3}$ von 36 bestimmen? (Kreuze eins oder mehrere an)

□ $36 - \frac{2}{3}$ □ $36 : \frac{2}{3}$ □ $\frac{2}{3} \cdot 36$ □ keines von denen, sondern so:______

b.) Begründe deine Antwort zu a.)

Abb. 5: Operation-Choice-Item mit Begründung

Eine Codierung und Analyse von 202 schriftlichen Begründungen der Operationsauswahl zeigt, wie vielschichtig das Phänomen tatsächlich ist. Folgende Strategien zur Auswahl einer mathematischen Operation zum gegebenen Situationsmodell konnten (in Prediger, 2009a) für drei Items rekonstruiert werden:

- Orientierung an Ordnungseigenschaften der Operationen (in 14 % der rekonstruierbaren Begründungen), z.B. folgende Begründung der falsch gewählten Division:
  Beim Multiplizieren kommt mehr heraus und beim Subtrahieren weniger nur halt falsch.
- Orientierung an Schlüsselworten (in 28 % der rekonstruierbaren Begründungen)
  Die antwort ist fältig, weil man ja $\frac{2}{3}$ von 36 haben möchte also minus.
- Neustrukturierung der Teile und Ganze (in 26 % der rekonstruierbaren Begründungen), z.B. bei dieser Begründung der falsch gewählten Division:
  Man muss ausrechnen wie oft $\frac{2}{3}$ in die 26 passen um den neuen Bruch zu bekommen.
- Rate-Strategie (in 7 % der rekonstruierbaren Begründungen)
- Andere Strategien (in 25 % der rekonstruierbaren Begründungen)

Auch wenn diese Untersuchung bereits einige Einsichten in die Denkwege der Lernenden ermöglicht, wird angesichts der Beschränktheit der Ergebnisse gleichwohl deutlich, dass die Analyse der kognitiven Feinstrukturen während der Übersetzungsprozesse weiterer Untersuchungen bedarf. Erste vertiefte Studien, die sich auch anderer Datenerhebungsmethoden als schriftlicher Tests bedienen (z.B. Renk, 2009), zeigen hier noch viel Potential, um die Rolle von Bildern, von Analogieschlüssen, von intuitiven Regeln (wie „Dividieren verkleinert immer“) und von einer Orientierung an Schlüsselworten oder Mustersituationen genauer zu verstehen.
Dieser kurze Ausblick zeigt auf, wo das Konstrukt Grundvorstellungen für kognitive Detail-Analysen an seine Grenzen gerät und durch andere theoretische Konstrukte ergänzt werden muss, wenn man der Vielschichtigkeit individueller Denkprozesse gerecht werden will.

Konsequenzen der empirischen Befunde zu Modellierungsprozessen für Entwicklungsarbeit: Vom Phänomen zur Denkform mit Ziel der inhaltlichen Anbindung

Fünf Bearbeitungsmuster wurden in diesem Beitrag als zentrale empirische Befunde der Untersuchungen individueller Modellierungsprozesse vorgestellt:

1. Muster: Sinnentleertes Kombinieren von Zahlen ohne Situationsmodell und Validierung
2. Muster: Individuelle Konstruktionen von Situationsmodellen
3. Muster: Bearbeitung auf individuellen Wegen im Kreislauf
4. Muster: Rückgriff auf informelles Können statt auf formale Beschreibungen
5. Muster: Fehlende Aktivierbarkeit geeigneter Grundvorstellungen

Die wichtigsten Konsequenzen dieser Bearbeitungsmuster für die Entwicklung und unterrichtliche Ausgestaltung von Lernarrangements lassen sich in zwei zentralen Bereichen zusammen fassen:

Aufgabenkultur und Unterrichtskultur zur Initiierung aller Modellierungsschritte:
Offenheit, Reichhaltigkeit und Authentizität als Qualitätskriterien

Die didaktischen Konsequenzen des 1. bis 3. Musters haben in den letzten Jahren die Entwicklungen im Bereich des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts deutlich geprägt. Gefordert und entwickelt wurden *offene reichhaltige Modellierungsaufträge*, mit denen die Lernenden eigenständig alle Schritte des Modellierungskreislaufs auf individuellen Wegen durchlaufen können. Solche Aufträge sollen einen Unterricht mit eingekleideten Textaufgaben ablösen, in denen Strukturierungs- und Interpretationsleistungen durch enge Formate und unmittelbare Anbindung an den Unterrichtsgang eingeschränkt waren („In der Aufgabe muss man bestimmt Multiplizieren, denn wir sind gerade beim Multiplizieren“). Betont wurde dabei auch die *Authentizität von Problemstellungen* als entscheidendes Qualitätsmerkmal (dem die Graupapagei-Aufgabe nicht standhalten kann). Der Bedeutung des 2. Musters wurde auch durch Einführung des Aufgabentyps der *unterbestimmten Modellierungsaufgabe* (z.B. sogenannte Fermi-Aufgaben) Rechnung getragen.

Zusätzlich zur Weiterentwicklung der *Aufgabenkultur* wurde unter dem Stichwort *Unterrichtskultur* auf den unterrichtlichen Umgang mit Aufgaben fokussiert, um gerade dem Strukturieren und Validieren auch in der eigenaktiven Arbeit der Lernenden den notwendigen Raum zu geben (vgl. Verschaffel et al., 2000 und Blum et al, 2007, für Literaturhinweise zu einzelnen Aspekten dieser zusammenfassenden Übersicht).

Anknüpfungspunkte im informellen Können konsequent nutzen
zum Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen

Die präskriptiven Konsequenzen des 5. Musters (Nichtaktivierbarkeit von Grundvorstellungen) wurden im vorigen Abschnitt bereits vorgestellt: Der *Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen* ist ein zentrales didaktisches Prinzip, um die *inhaltliche Verstehensbasis* und die *Anwendbarkeit* mathematischen Wissens zu gewährleisten. Nur damit ist Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt lernbar.

Ansätze zur Konstruktion potentieller Lernwege zum nachhaltigen Aufbau von Grundvorstellungen ergeben sich aus dem 4. Muster, also der Beobachtung, dass Lernende oft bereits über informelles Können zum Lösen lebensweltlicher Probleme verfügen, bevor die Fähigkeit zum formalen Beschreiben desselben Phänomens ausgeprägt ist. Hier zeigt sich eine le-

bensweltliche, meist vorunterrichtliche Ressource, die als Anknüpfungspunkt für den Lernprozess genutzt werden kann.
Gleichzeitig darf aber auch die Formalisierungsanforderung als eigenständige Herausforderung im Lernprozess nicht unterschätzt werden, sondern muss gezielt bearbeitet werden.

Für den Lernprozess zum Aufbau von Grundvorstellungen ergeben sich drei Stufen, von denen Gravemeijer (1999) in seinem Konzept des emergent modelling zwei mit dem Begriffspaar ‚model for a situation' und ‚model of reasoning' bezeichnet und den Übergang als wichtige didaktische Herausforderung beschrieben hat. Zusätzlich sollen hier auch die Entwicklung des Kalküls und die Flexibilisierung als eigene Stufe einbezogen werden.

1. Stufe: Aufbaus eines ‚model of a situation' ausgehend von informellem Können
2. Stufe: Übergang zu einem ‚model for reasoning'
3. Stufe: Entwicklung und Anwendung eines interpretationsfreien Kalküls
4. Stufe: Flexible Nutzung aller drei Stufen

Die Stufen können am Beispiel der Gleichwertigkeit von Brüchen verdeutlicht werden.

Beispiel Gleichwertigkeit von Brüchen

Kinder der Klasse 6 lernen, wann Brüche gleichwertig sind, dass also z. B. gilt 3/5 = 6/10. Auf der Kalkül-Ebene gehört dazu die mathematische Operation des Erweiterns von Brüchen. Ein vorstellungsorientierter Zugang zur Gleichwertigkeit wird jedoch nicht damit beginnen, sondern mit einer inhaltlichen Deutung der Gleichwertigkeits-Aussage. Eine wichtige Grundvorstellung zur Gleichwertigkeit ist die Verfeinerung von Einteilungen bei Anteilen: Beschreiben die beiden genannten Brüche Anteile eines Ganzen, dann sind beide Anteile gleich groß, nur ist das Ganze feiner eingeteilt.
Um die Gleichwertigkeit von Brüchen ausgehend von informellen Ressourcen der Lernenden entwickeln zu können, muss ein Anknüpfungspunkt im inhaltlichen Denken gefunden werden, zu dem Lernende bereits Erfahrungen haben sammeln können. Das trifft auf die Verfeinerung von Anteilen nur bedingt zu, deswegen wird als Anknüpfungspunkt stattdessen die Trefferquoten gewählt.

1. Stufe: Aufbaus eines „model of a situation" ausgehend von informellem Können zu Trefferquoten

Als Ausgangspunkt zum Aktivieren vorunterrichtlicher Ressourcen beschäftigen sich die Lernenden mit folgender lebensweltlicher Situation:

Kinder haben Basketball gespielt, Eva hat bei 5 Würfen 3 mal geworfen, Paul 6 mal bei 10 Würfen und Lisa 5 mal bei 9 Würfen. Wer hat am besten getroffen?

Eine Diskussion führt Lernende meist schnell dazu, dass man auf diese Situation eine relative Sicht einnehmen muss, denn ein Vergleich absoluter Häufigkeiten wäre angesichts der unterschiedlichen Wurfzahlen nicht fair. Das Problem wird dabei aber zunächst meist rein mit informellen Mitteln gelöst (in Abb. 6 angedeutet, indem der Zyklus des Bearbeitungsprozesses nur in der außermathematischen Welt verortet ist).

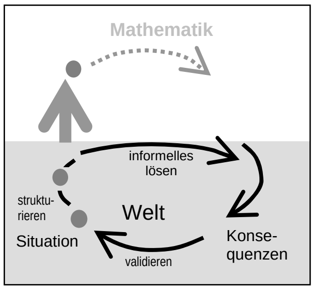

Abb. 6: Vom Informellen zum Aufbau von Modellen

Die zunächst informelle Lösung, dass Evas und Pauls Wurf gleich gut sind, kann dann im nächsten Schritt als Gleichwertigkeit der Brüche 3/5 und 6/10 formalisiert werden.
Damit erfolgt ein Ausbau der Betrachtung in die Sprache der Mathematik, die in Abb. 6 durch den dicken senkrechten Pfeil angedeutet ist. Die formale Erweiterung der Brüche wird dabei zunächst weiter inhaltlich verstanden: Paul braucht bei doppelter Zahl von Würfen auch doppelt so viele Treffer, um so gut wie Eva zu sein.
Durch Variation der Beispiele und Variation der mathematischen Beschreibungen können die Brüche und die Prüfung der Gleichwertigkeit zu einem mathematischen Modell für die Situationen der Trefferquoten werden.

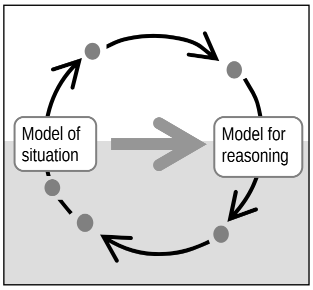

Abb. 7: Notwendiger Übergang im Lernprozess

2. Stufe: Übergang zu einem „model for reasoning“ , z.B. für inhaltlich-anschauliche Begründungen

Wer Vertrauen gewonnen hat in die Übersetzung zwischen lebensweltlicher Situation und mathematischer Beschreibung, kann umgekehrt die Rückübersetzung nutzen, um formale Fragen zu klären.
Gilt zum Beispiel die Ungleichung $\frac{n}{m} > \frac{n+1}{m+1}$?
Das Modell „Gleichwertigkeit als gleiche Trefferquote“ als model for reasoning zu nutzen, heißt, inhaltlich-anschauliche Begründungen für formale Fragen heranziehen zu können. Die Quote von n Treffern bei m Würfen verbessert sich durch einen weiteren Treffer, also gilt für Brüche mit $n < m$ (nur diese sind als Trefferquoten deutbar) die Beziehung $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$.
Dies lässt sich auch formal nachrechnen, ist aber auf inhaltlich-anschaulichem Weg schneller begründet (vgl. Blum & Kirsch, 1979).

3. Stufe: Entwicklung und Anwendung eines interpretationsfreien Kalküls – die Regel zum Erweitern von Brüchen

Zur Entwicklung eines Kalküls, der auch unabhängig von der Interpretation in lebensweltlichen Situationen funktioniert, wird nun aus den lebensweltlichen Regeln eine Regel für den Umgang mit formalen Brüchen abgeleitet: Bei n-fachem Nenner brauche ich auch den n-fachen Zähler, damit der neue Bruch gleichwertig ist. Denn für die Trefferquoten lässt sich das leicht übersetzen: Bei der n-fachen Wurfzahl brauche ich n-fache Trefferzahl, dann ist die Trefferquote gleich. Die Erarbeitung der Kalkül-Regel erfolgt mit Rückbezug zur lebensweltlichen Situation, das Modell „Gleichwertigkeit von Brüchen als gleiche Trefferquoten“ wird dazu als *model for reasoning* genutzt.
Ist die Kalkül-Regel einmal begründet, kann das Kalkül dann auch auf Fälle angewandt werden, die die lebensweltlichen Kapazitäten übersteigen: Zum Beispiel kommt das lebensweltliche Lösen an Grenzen bei der Frage, welcher Bruch mit Nenner 12345 gleichwertig zu 3/5 ist. Hier wird der reine Kalkül als Denkentlastung erlebbar.

4. Stufe: Flexible Nutzung aller drei Stufen

Flexible Expertise ist erreicht, wenn je nach Anforderung alle drei Varianten der Beziehung von Lebenswelt und Mathematik genutzt werden können, die in den drei Stufen aufgebaut wurden.

Insgesamt zeigt das Beispiel, wie vielschichtig gerade im Prozess des Vorstellungsaufbaus die Beziehung zwischen inhaltlich-lebensweltlichem Denken und formalem Denken sowie den zugehörigen Übersetzungsprozessen ist. Die skizzierte Stufung zu berücksichtigen hat sich für das Design von Lernwegen ebenso bewährt wie für ihre empirische Beforschung (Gravemeijer, 1999, für die Analysis auch Hahn & Prediger 2008).

Schlussbemerkung

Mit dem Beitrag sollte an konkreten Beispielen ein (natürlich bei weitem nicht vollständiger) Überblick über wichtige Aspekte der mathematikdidaktischen Diskussion zu Herausforderungen und Ansätzen des Lernens von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt gegeben werden. Dazu wurden Modellierungskreislauf und Grundvorstellungen als Konstrukte vorgestellt, mit denen in der Mathematikdidaktik die (zur Nutzung von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt) notwendigen kognitiven Teilaktivitäten und Wissenselemente gefasst werden können. Fünf gut untersuchte typische Bearbeitungsmuster wurden vorgestellt, die Modellierungsprozesse von Lernenden aller Altersgruppen prägen.
Auch wenn wir längst nicht alle wichtigen Phänomene in diesen komplexen Prozessen verstanden haben, hat die mathematikdidaktische Entwicklungsforschung für einen vorstellungsorientierten und realitätsbezogenen Mathematikunterricht bereits einige wichtige Konsequenzen ziehen können, deren Wirkungen für die Verläufe und Qualitäten der Lernprozesse jedoch weiter beforscht werden müssen.

Literatur

Baruk, S. (1985). L'âge du capitaine: de l'erreur en mathématiques, Paris : Editions du Soleil.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Warum haben nicht-triviale Lösungen von f'=f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum „inhaltlich-anschaulichen" Beweisen. In: Metzler u.a. (Hrsg.): Anschauliches Beweisen, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 18. Stuttgart: Teubner, 199-209.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Hrsg.) (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland., Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 145-157.

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Journal für Mathematikdidaktik 22 (1), 73-90.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2), 86-95.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. For the learning of mathematics, 9 (2), 9-14.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Kluwer.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38(2), 143-162.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking & Learning, 1(2), 155-177.

Greeno, J. G. (1998). The Situativity of Knowing, Learning, and Research. American Psychologist, 53 (1), 5-26.

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. Journal für Mathematikdidaktik 29(3/4), 163-198.

Jordan, A. (2006). Mathematische Bildung von Schülern am Ende der Sekundarstufe I – Analysen und empirische Untersuchungen. Hildesheim: Franzbecker.

Kultusministerkonferenz der Länder (2004). Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss vom 16.12.2004. München: Luchterhand.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Mathematik lehren 123, 4-8.

Nunes, T., Schliemann, A.D., & Carraher, D.W. (1993). Street mathematics and school mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
Pollak, H.O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Hrsg.). New trends in mathematics teaching IV, Paris: Unesco, 232-248.
Posner, G., Strike, K., Hewson, P.W., Gertzog, W.A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. Science Education, 66 (2), 211-227.
Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. Learning and Instruction, 18 (1), 3-17.
Prediger, S. (2009a). "…because 'of' is always minus…" - Students explaining their choice of operations in multiplicative word problems with fractions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Hrsg.). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, Thessaloniki: PME, 401-408.
Prediger, S. (2009b). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.). Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Weinheim: Beltz Verlag, 213-234.
Prediger, S. (2009c). Zur Bedeutung vielfältiger Theorien und wissenschaftlicher Praktiken in der Mathematikdidaktik am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. In M. Neubrand (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM Verlag.
Renk, N. (2009). Operationsverständnis von Grundschulkindern beim Mathematisieren von Textaufgaben. Eine empirische Untersuchung zu Strategien des intermodalen Transfers, Unveröffentlichte Masterarbeit, betreut von Susanne Prediger, TU Dortmund.
Schwarzkopf, R. (2007). Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter et al. (Hrsg.). Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis. Hildesheim: Franzbecker, 95-104.
Usiskin, Z. (1991). Building mathematics curricula with applications and modelling. In M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Hrsg.). Teaching of mathematical modelling and applications. Chichester: Horwood, 30-45.
van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals and proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6. Rotterdam: Sense Publishers.
Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse: Swets & Zeitlinger.
vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.
vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2006). The effect of mental models ("Grundvorstellungen") for the development of mathematical competencies. First results of the longitudinal study PALMA. In M. Bosch (Hrsg.). Proceedings of the CERME 4, 142-151.
Vosniadou, S., Verschaffel, L. (2004). The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. Learning and Instruction 14(5), 445-548.