Wer zerlegt zuletzt?
Spielend die Primfaktorzerlegung erkunden

Susanne Prediger, Thorsten Dirks, Julia Kersting
Vorversion eines Artikels für die PM – Praxis der Mathematik in der Schule 25 (2009) 51

Zusammenfassung: Im Spiel „Wer zerlegt zuletzt?“ werden Lernende (ab Klasse 4) an Begriffe und Zusammenhänge rund um die Primfaktorzerlegung herangeführt. Beispiele zeigen, wie sie selbständig Begriffe (nach-)erfinden und Gesetzmäßigkeiten untersuchen.

Das Gebiet der Zahlentheorie ist ein wunderbares Feld für mathematische Erkundungen. Lernende können mit relativ wenig Vorgaben eigentätig mathematische Begriffe und Zusammenhänge erkunden, wie zum Beispiel das Konzept der Primzahlen und die Gesetzmäßigkeit, dass sich jede Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen lässt. Auf diese Konzepte zielt das Spiel „Wer zerlegt zuletzt“, das wir ausgehend von der Aufgabe „*Zahlen zertrümmern*“ aus dem Schulbuch Neue Wege 6 (Lergenmüller / Schmidt 2001, S. 34) ausformuliert und erprobt haben. Die aus diesen Erprobungen hervorgegangene Spielregel ist in *Kasten 1* abgedruckt.

Die Vorstellung des Spiels und seiner mathematischen Potentiale ergänzen wir durch Einblicke in Erkenntnisse von spielenden und reflektierenden Kindern der Klasse 4 bis 6, die beim Spielen (von unterschiedlichen Versionen des Spiels) beobachtet wurden. Dies geschah in einer Untersuchung im Rahmen der Bachelorarbeit der beiden ersten Autoren (Dirks / Kersting 2008) unter Betreuung der dritten Autorin sowie im Unterricht der dritten Autorin.

Das Spiel leitet zum wiederholten Durchführen eines wichtigen Verfahrens an, nämlich zur sukzessiven multiplikativen Zerlegung von Zahlen in ihre Primfaktoren. Einige Erkenntnisse gewinnen Kinder, während sie intuitiv ausprobieren; andere, tiefer liegende Gesetzmäßigkeiten finden sie nur, wenn sie gezielt nach Gewinnstrategien suchen. Da nicht alle Kinder systematisch vorgehen, skizziert der letzte Abschnitt dieses Artikels unterrichtliche Möglichkeiten, den Wechsel vom Spielen zum Reflektieren gezielt anzuregen und so die angelegten reichhaltigen mathematischen Potentiale auch konsequenter auszuschöpfen.

Mathematische Potentiale des Spiels

An das Spiel kann man viele mathematisch reichhaltige Fragen stellen, sie sind zur Übersicht in *Kasten 2* abgedruckt. Natürlich stellt sich nicht jedes Kind all diese Fragen (schon gar nicht von selbst), doch zeigt die Zusammenstellung das reichhaltige Spektrum dessen, was möglich wäre.

Wer zerlegt zuletzt? – Spielregel

Spielerzahl und Material: Gespielt wird immer zu zweit, gebraucht werden nur Zettel und Stift

1. Zug: Das jüngere Kind fängt an:
Es denkt sich eine Zahl aus (*die Startzahl*) und schreibt sie auf.

2. Zug: Nun zerlegt das ältere Kind die Startzahl. Das bedeutet, es versucht eine Malaufgabe zu finden, die beim Ausrechnen die Startzahl ergibt.

3. Zug: Ebenso versucht das jüngere Kind, einen der beiden Faktoren aus dem 2. Zug zu zerlegen, so entsteht eine Malaufgabe mit drei Faktoren.

4. Zug: Nun zerlegt das ältere Kind einen der Faktoren aus dem 3. Zug.

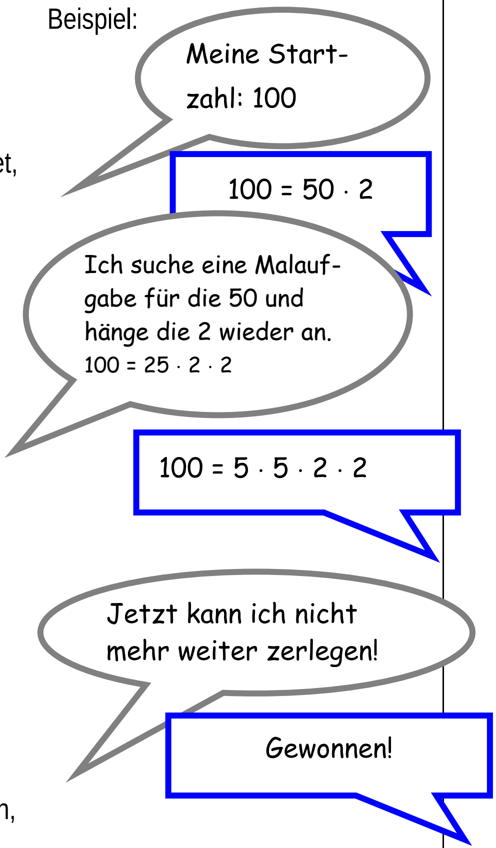
und so weiter…

Ende: Das Spiel wird so lange gespielt, bis man nicht weiter zerlegen kann.

Sieger: Wer zerlegt zuletzt? Der hat gewonnen.

Verbotene Zahlen: Die 1 ist verboten, also Aufgaben wie $2 = 1 \cdot 2$. Auch Kommazahlen und Brüche sind verboten, also Aufgaben wie $3 = 2 \cdot 1{,}5$.

Beispiel:



Rollentausch: Nach zehn Spielen wird getauscht, jetzt darf das andere Kind anfangen

Kasten 1

Vielzahl möglicher mathematischer Fragen an das Spiel „Wer zerlegt zuletzt?“

1. Wenn die Startzahl fest gewählt ist, kann dann jede Zahl als Faktor dieser festen Startzahl in der Zerlegung auftauchen? Welche Zahlen können es?
2. Gibt es Zahlen, bei denen das jüngere Kind direkt gewinnt, also das Spiel gar nicht beginnen würde? Welche Zahlen unter 100 sind das?
3. Wie erkennt man, dass man nicht mehr weiter zerlegen kann?
4. Wieso ist die 1 verboten?
5. Findet man eine Zahl mit zwei verschiedenen Zerlegungen, je nachdem, wie man anfängt?
6. Wer gewinnt? Und wie?
7. Wie kann man aus einer Gewinnzahl des jüngeren Kindes eine Gewinnzahl für das ältere bauen?
8. Welche Zahlen muss das jüngere Kind wählen, damit es gewinnt?
9. Welche Zahlen soll es wählen, damit das ältere Kind mal gewinnt?

Kasten 2

Teiler und Teilersuche

Die erste Herausforderung liegt darin, die Spielregel zu erfassen: Wieso nicht zerlegen wie Yasmin? $150 = 100 + 2 \cdot 25$. Weil hier nur multiplikativ zerlegt werden soll. Und wieso nicht wie Anita und Pia: Erster Zerlegungsschritt: $150 = 75 \cdot 2$, zweiter Schritt: $150 = 3 \cdot 50$? Weil laut Spielregel immer weiter zerlegt werden soll.

Die *1. Frage* nach der Beziehung zwischen Startzahl und Faktoren führt auf den mathematischen Begriff des Teilers; die Kinder formulieren ihre Antwort natürlich anders: „wenn die eine in der anderen drin steckt" oder „irgendwas mal Faktor muss die Startzahl sein".

Einige Kinder müssen dabei das Hindernis überwinden, nicht nur im kleinen Einmaleins zu rechnen: „33 ist doch nicht in der Dreier-Reihe" (Klara im Unterricht), auch Rechenfehler bleiben natürlich nicht aus. Die Teilersuche bildet (insbesondere bei Wahl großer Zahlen) für einige einen herausfordernden Anlass, das Dividieren im Kopf zu üben. Hilfreich sind Kenntnisse von Teilbarkeitsregeln oder notfalls die Hinzuziehung eines Taschenrechners. Doch selbst bei solchen prozeduralen Hindernissen entsteht konzeptuell Spannendes:

Primzahlen und ihre verschiedenen Gesichter

Schnell haben die Kinder auch Zahlen gefunden, bei denen das Spiel gar nicht richtig losgeht (2. Frage): „Da nehme ich die 7, da hab ich gleich gewonnen!" (Marlon im Unterricht). Finden wir alle Zahlen, mit denen das Spiel gar nicht erst losgeht? Bei kleinen Zahlen wie 3, 5 und 7 sehen viele Kinder sofort, dass sie keine Teiler haben, also auch nicht zerlegbar sind, doch gibt es auch größere? Einige Kinder begeben sich hier auf die Sache nach den Zahlen (kleiner 100), mit denen man schnell fertig ist. Dabei entwickeln sie ein Konzept von Primzahlen als unzerlegbare Zahlen, also denjenigen, zu denen man keine Teiler findet. Die Kinder erarbeiten sich bereits hier zwei verschiedene Sichtweisen auf die Primzahlen (vgl. Neubrand/Möller 1990, S. 129):

1. Charakterisierung: Primzahlen sind die Zahlen „mit möglichst wenigen Teilern", genauer gesagt mit zwei Teilern.

2. Charakterisierung: Primzahlen sind unzerlegbare Zahlen.

Damit das jüngere Kind beim Spielen jedoch nicht immer gewinnt, sind die Primzahlen als Startzahlen durch die Formulierung der Sieg-Regel ausgeschlossen. Es siegt, wer zuletzt zerlegt.
Die 3. Frage nach möglichen Stopp-Signalen bereitet die 3. Charakterisierung vor:

3. Charakterisierung: Primzahlen sind die elementaren Bausteine, aus denen jede Zahl multiplikativ zusammen gesetzt ist.

Aus fachdidaktischer Sicht sind diese unterschiedlichen Sichtweisen entscheidend: „Für ein volles Verständnis der Primzahlen sind alle drei Gesichtspunkte wichtig." (Padberg 2008, S. 34) - und auch ihre Vernetzung, das sei hier hinzugefügt.

Die dritte Charakterisierung kommt allerdings erst in der weiteren Beschäftigung in ganzer Breite zum Tragen. Zunächst ist die Formulierung „das Spiel stoppt immer bei Primzahlen" diejenige, die die Verbindung von zweiter zu dritter Charakterisierung herstellt. Und so erkennt man auch die Gesetzmäßigkeit des Stoppens (*4. Frage*): Man kann dann nicht weiter zerlegen, wenn man mit allen Faktoren bei Primzahlen angekommen ist. Nach zwei-drei Versuchen, Primzahlen wie 13 oder 19 weiter zu zerlegen, werden sie ins Repertoire der bekannten nicht zerlegbaren Zahlen zu 2,3 und 5 aufgenommen.

Im Kontext des Zerlegungsspiels ist vollkommen klar, wieso 1 nicht als Primzahl gelten sollte (und die erste Charakterisierung somit die präzisierte Bedingung „mit zwei Teilern" braucht!). Die 4. Frage, wieso die 1 beim Spiel verboten ist, beantworten Leyla und Yasmin mit dem Verweis, dass das Spiel dann kein Ende hätte (Kersting / Dirks 2008, S. 118):

Leyla: Weil 1 kann man doch alles machen.

Yasmin: Weil immer so 1 · 1 · 1 · 1…

Spielend zum Hauptsatz der Zahlentheorie

Da in der Spielregel der Zerlegungsalgorithmus für die Primfaktorzerlegung codiert ist, wird ihre *Existenz* durch die Spielererfahrung selbstverständlich. Aus der Spielsituation heraus überraschender dagegen ist, dass unterschiedlich begonnene Zerlegungen einer Startzahl immer beim (bis auf Reihenfolge) gleichen Ergebnis enden. Mit dieser Entdeckung wurde zum Beispiel für Carola und Jan (vgl. *Abb. 1*) auch der zweite Teil des Hauptsatzes der Zahlentheorie durch das Spiel erfahrbar: die *Eindeutigkeit* der Primfaktorzerlegung (z.B. Padberg 2008, S. 63). Da sich die Kinder allerdings diese Frage nicht unbedingt selbst stellen, bedarf es dazu weiterer Anregungen (s.u.)

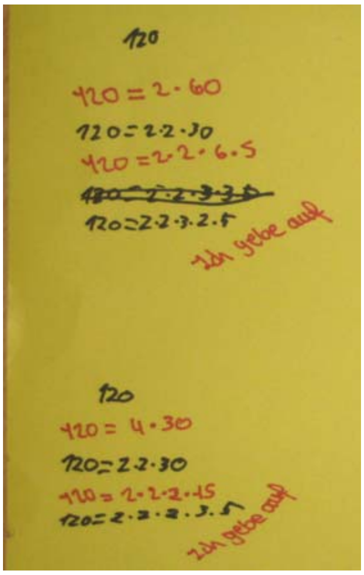


Abb.1: *Wie eindeutig ist die Primfaktorzerlegung?*

Wer gewinnt? Und wie?

Unter all den mathematisch bearbeitbaren Fragen ist natürlich die nach dem Gewinner und der Gewinnstrategie die dringendste. Schnell entdecken die Kinder, dass sie durch die Variation der Startzahl den Ausgang beeinflussen können. Sofort gibt es auch Vermutungen zum Sieger, wie etwa von Marcel (Kersting/Dirks 2008, S. 28):

Marcel: „Ich weiß auch wieso [ich gerade verloren hab:…]: Weil der anfängt, hat sozusagen den Kürzeren auch gezogen, nachher.

Dirks: Meinst du das, dass der der angefangen hat, verloren hat?

Marcel: Ja, der eigentlich immer anfängt,. [...] Also wir haben in der Grundschule so gemacht [… bei einem anderen Spiel…], Der erste hat angefangen. Mit dem Finger auf die 1, musste der zweite 2 und danach hat der zweite dann halt gewonnen.

Marcel hat mit seiner Analogie zu dem ihm vertrauten NIM-Spiel mehr Recht, als ihm zu diesem Zeitpunkt schon klar sein kann: Auch bei diesem Spiel gibt es für das anfangende jüngere Kind eine Gewinnstrategie, mit der das zweite Kind keine Chance mehr hat (s.u.).

Eine zunächst von vielen Kindern geäußerte Vermutung ist, dass immer der anfangende gewinnt (bzw. verliert, wie andere Kindern vermuten). Diese Vermutung können die meisten durch eigene weitere Beispiele widerlegen (vgl. Kersting/Dirks 2008, S. 37). Ist ein Gegenbeispiel gefunden, äußern viele spontan die genau gegenteilige Vermutung: „Nee, dann halt immer verlieren – ach nee, auch nicht!"

Ähnlich verlaufen die Prozesse bei der häufig geäußerten Vermutung, dass immer alle geraden Startzahlen gewinnen. Gerade Zahlen sind als Startzahlen ebenso beliebt wie Zehnerzahlen, weil man den ersten Teiler leicht findet (Kersting/Dirks 2008, S. 37f).

Leila: Vielleicht wenn ich eine glatte Zahl nehme? Und dann „Ein-Mal-Eins“ mal durchgehe, zum Beispiel 3 mal 5 ist ja 15, wenn wir …. Ah eine Null mehr, ehm 150. Also eigentlich glatte Zahl muss sein, eigentlich.

Dass allerdings gerade oder Zehnerzahlen nicht automatisch zum Sieg führen, entdecken die meisten dann beim Ausprobieren an Gegenbeispielen.

Abb. 2: *Lena und Ali beim Planen des Spiels – Strategie gefunden!*

Eine der wichtigsten Entdeckungen der Kinder ist, dass man mit einer Zahl, von der man die Zerlegung kennt, das Ergebnis beeinflussen kann. Ein interessantes Beispiel dafür bieten Ali und Lena (vgl. *Abb. 2*) mit ihrer Strategie, die Startzahl als Produkt einer Primzahl mit 10 zusammensetzen (vgl. ihr Plakat in *Abb. 3*). Sie erkannten, dass die „10“ einen Zerlegungsschritt hat und fügten durch die Multiplikation mit nicht weiter teilbaren Zahlen einen Schritt hinzu (Kersting/Dirks 2008, S. 16).

Lena: Aber ich habe ja extra die 370 genommen, weil ich wusste, dass du das nimmst. (zeigt auf den Zertrümmerungsschritt „10 mal 37“)... Ich habe mir ja extra dann die Zahl ausgesucht, damit du die 37 nicht mehr teilen kannst.

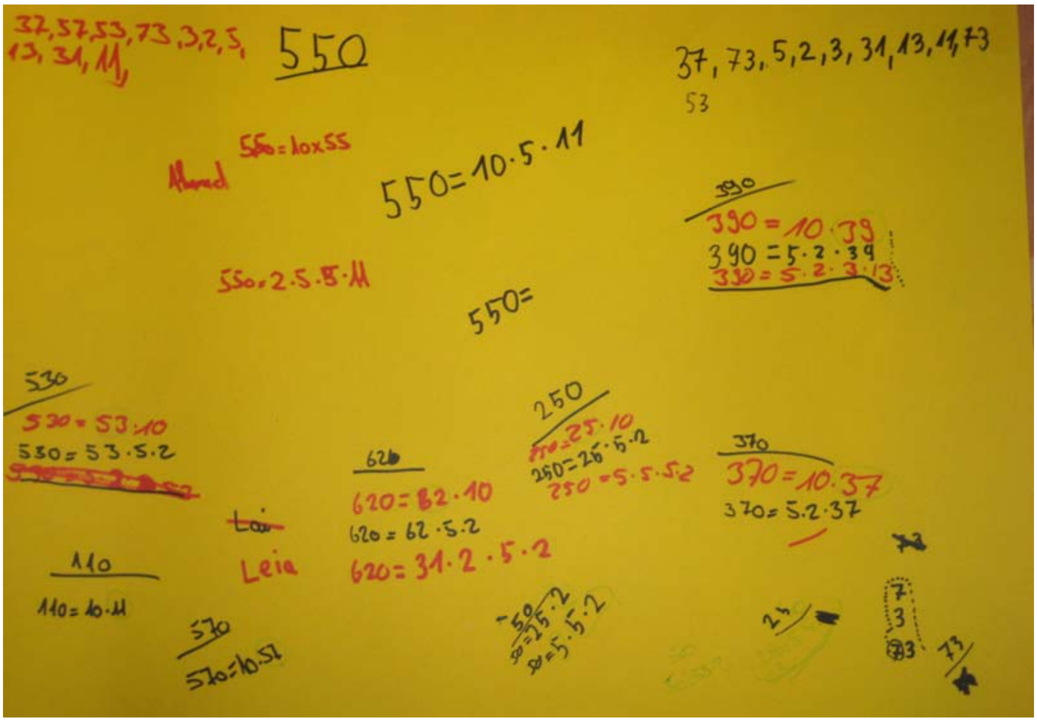


Abb. 3*: Lenas und Alis Plakat: Primzahl mal 10 gewinnt immer!*

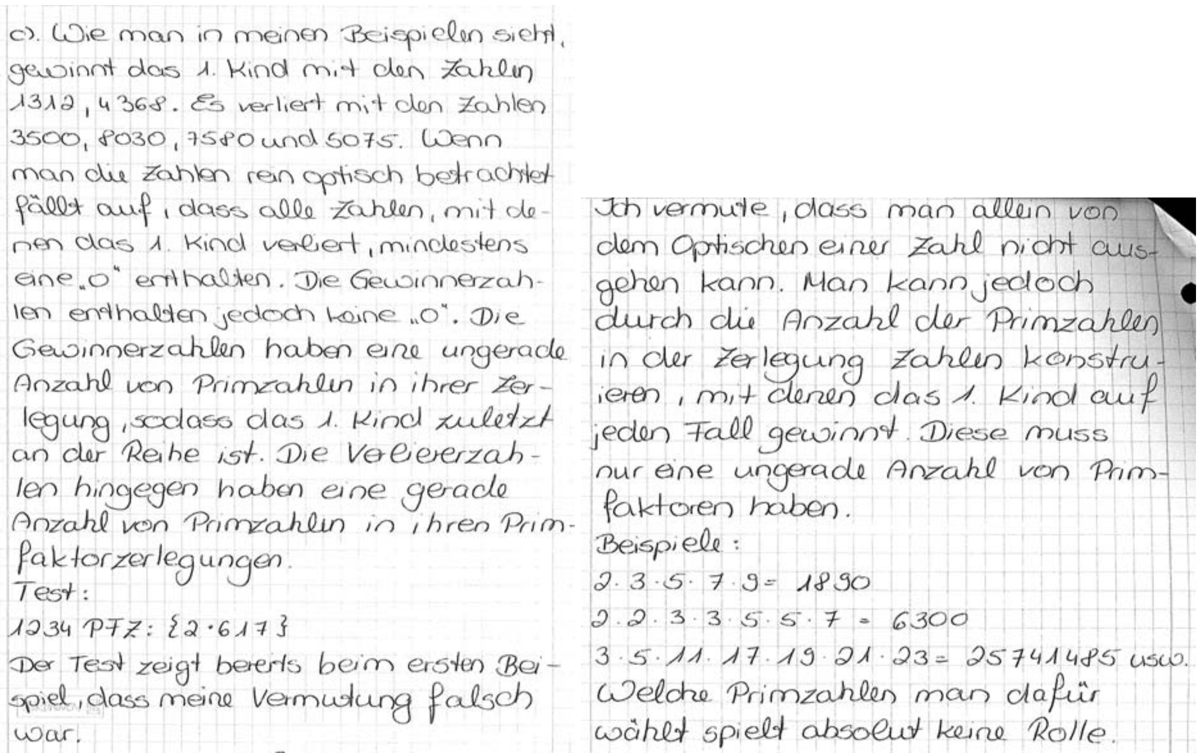
Mit dieser Strategie erzeugten Ali und Lena viele Startzahlen, mit denen sie gegen die betreuende Person gewonnen haben.

Die Bedingung für alle Gewinn-Startzahlen in voller Allgemeinheit zu finden, ist eine große Herausforderung, da dies einen Richtungswechsel im Verfahren erfordert: Nicht mehr Zerlegen gegebener Startzahlen, sondern Zusammensetzen aus Faktoren. Die Startzahl lässt sich nämlich, sozusagen rückwärts, aus verschiedenen Primfaktoren zusammenbauen. Diesen Richtungswechsel haben Ali und Lena schon vollzogen (*Abb. 3*), viele andere Kinder jedoch erst nach entsprechenden Impulsen.

Alis und Lenas Strategie lässt sich so verallgemeinern: Das anfangende Kind gewinnt immer dann, wenn die Anzahl der Spielschritte ungerade ist. Also muss die Zahl aus einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren bestehen, z.B. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, aber nicht $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Algebraisch formuliert: Das anfangende Kind gewinnt bei $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \ldots \cdot p_s^{k_s} \ldots$, wenn die Summe $k_1+k_2+k_3+\ldots+k_s$ ungerade ist.

Abb. 4 dokumentiert Überlegungen einer Lehramtsstudentin zur gleichen Frage, die sich im besten Sinne über mehrere (zunächst noch nicht tragfähige) Vermutungen und eigenständige Widerlegungen zum richtigen Ergebnis vorarbeitet. Das Beispiel zeigt, dass dieses Problem Substanz für Mathematiktreiben auf unterschiedlichsten Niveaus birgt.



a). Wie man in meinen Beispielen sieht, gewinnt das 1. Kind mit den Zahlen 1312, 4368. Es verliert mit den Zahlen 3500, 8030, 7580 und 5075. Wenn man die Zahlen rein optisch betrachtet fällt auf, dass alle Zahlen, mit denen das 1. Kind verliert, mindestens eine „0" enthalten. Die Gewinnerzahlen enthalten jedoch keine „0". Die Gewinnerzahlen haben eine ungerade Anzahl von Primzahlen in ihrer Zerlegung, sodass das 1. Kind zuletzt an der Reihe ist. Die Verlierezahlen hingegen haben eine gerade Anzahl von Primzahlen in ihren Primfaktorzerlegungen.

Test:

1234 PFZ: {2·617}

Der Test zeigt bereits beim ersten Beispiel, dass meine Vermutung falsch war.

Ich vermute, dass man allein von dem Optischen einer Zahl nicht ausgehen kann. Man kann jedoch durch die Anzahl der Primzahlen in der Zerlegung Zahlen konstruieren, mit denen das 1. Kind auf jeden Fall gewinnt. Diese muss nur eine ungerade Anzahl von Primfaktoren haben.

Beispiele:

2·3·5·7·9 = 1890

2·2·3·3·5·5·7 = 6300

3·5·11·17·19·21·23 = 25741485 usw.

Welche Primzahlen man dafür wählt spielt absolut keine Rolle.

***Abb. 4**: Woran erkennt man Gewinnerzahlen? Erkenntniswege einer Lehramtsstudentin*

Unterrichtliche Umsetzung: Spielen und Analysieren

Die Beispiele zeigen, dass das Spiel reichhaltige zahlentheoretische Erfahrungen und Erkenntnisse ermöglicht, gleichwohl ist dies kein Selbstläufer: Wie bei vielen anderen Strategiespielen auch, beginnen nicht alle Kinder von selbst, mögliche Gewinnstrategien zu suchen und allgemein zu formulieren. Andere verbleiben lieber im unsystematischen Spiel, genießen sogar die Zufälligkeit des Ausgangs. Das ist in der Logik des Spielens legitim, auch unter Erwachsenen gibt es viele, denen Glücksspiele mehr Freude bereiten als „zu viel denken müssen".

Mathematisch bildend wird das Spiel allerdings erst wirklich, wenn es gelingt, auch diejenigen zum Reflektieren zu bringen, die nicht von selbst den intellektuellen Reiz des Strategienfindens verspüren.

Daher sollte nach einer Spielphase offiziell für alle eine (oder mehrere) Analysephase eröffnet werden. Dadurch wird expliziert, dass jetzt die mathematische Reflexion beginnt, die für einige dem Spiel inhärent ist, für andere jedoch über das Spielen an sich hinaus geht. Beim Arbeiten in Paaren ist wichtig, dass die Kinder aus der Logik des Spiels heraus nicht gezwungen sind, gefundene gute Strategien dem „Gegner" zu verheimlichen. Dies ist in unterschiedlichen methodischen Variationen möglich. *Kasten 3* zeigt drei Beispiele, die sich in der kognitiven Anforderung an die Eigenaktivität der Lernenden deutlich unterscheiden und natürlich kombiniert werden können. Der Ausschnitt als Toms Lerntagebuch in *Abb. 5* zeigt ein Beispiel für eine über das Spiel hinausgehende Reflexion.

Abschließend sei betont, dass alle Wege der Analyse offen bleiben sollten für die Vielfalt möglicher Entdeckungen. Denn die generierten Erkenntnisse zu normieren hieße, das Differenzierungspotential des Spiels nicht zu nutzen.

Spielen und Analysieren – Schritte im Unterricht

Variante A:

1. Unsystematisches Spielen in Paaren
2. Ungerichteter Auftrag, das Spiel in Paaren zu analysieren: Was fällt Euch auf? Schreibt einige Entdeckung auf
3. Reflexion im Klassengespräch (entlang der in Kasten 2 formulierten Fragen, hier lohnt z.B. die Sammlung unterschiedlicher Zerlegungen zur gleichen Zahl)

Variante B:

1. Unsystematisches Spielen in Paaren
2. Kleinere, allein bewältigbare Analyse-Fragen als Hausaugabe, z.B.:
    - Ich habe 100 als Startzahl gewählt, welche Zahlen könnten alles als erste Faktoren vorkommen? Warum?
    - Schreibe alle Zahlen, die in den letzten Zerlegungen stehen, in einer Liste zusammen. Wieso ist 12 nicht dabei?
    - Nenne fünf Zahlen, mit denen das Kind, das anfängt, sicher gewinnt.
3. Gemeinsame Besprechung im Klassengespräch in der nächsten Stunde, zum Beispiel zur Sammlung aller Primzahlen bis 100
4. Dann ggf. weiter mit komplexeren Untersuchungsaufgaben in Kleingruppen (siehe Variante 3)

Variante C:

1. Unsystematisches Spielen in Paaren
2. Auftrag zur Strategieerkundung innerhalb der Spielsituation: Ihr sollt gleich gemeinsam gegen den Nachbartisch spielen, überlegt Euch, mit welchen Zahlen Ihr anfangen wollt!
3. Erprobung der gewonnenen Strategie gegen Nachbartisch oder „Verbünden" gegen Lehrkraft (als Anlass zum Austausch der Ideen zu viert)

Kasten 3

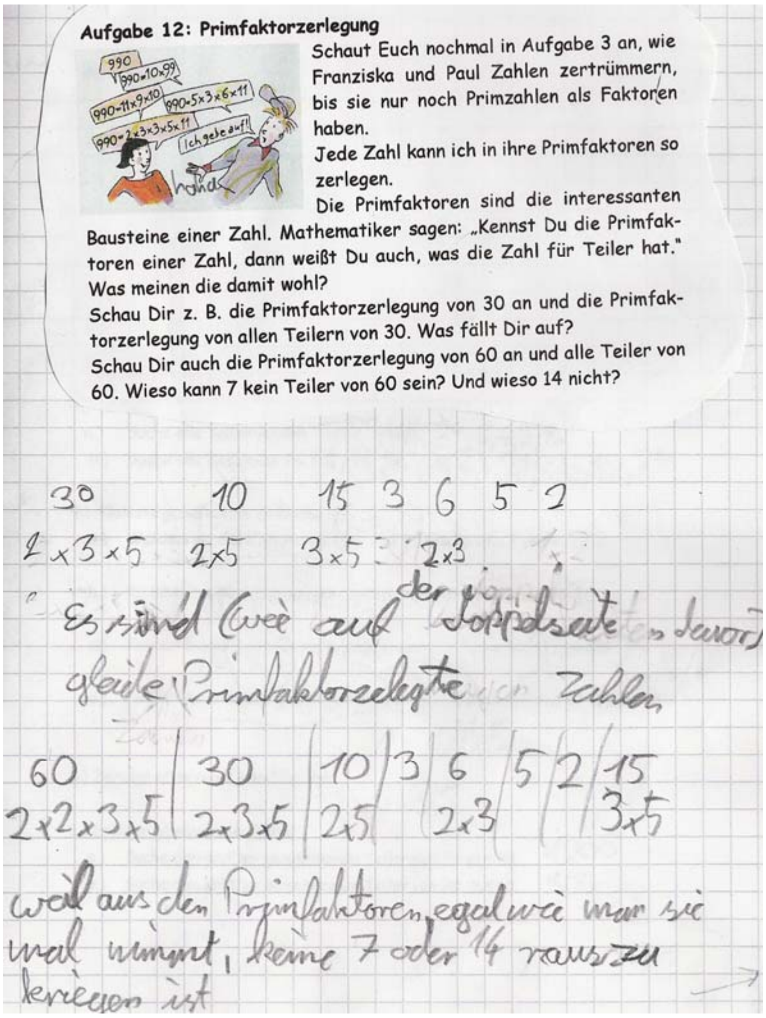


***Abb. 5**: Über das Spiel hinaus denken - Toms Lerntagebuch*

Literatur

Dirks, Thorsten / Kersting, Julia (2008): Erkenntnisprozesse von Kindern in einer Erkundungsaufgabe zur Primfaktorzerlegung, Bachelorarbeit, betreut von S. Prediger, TU Dortmund.

Lergenmüller, Arno / Schmidt, Günter (2001) (Hrsg.): Mathematik Neue Wege 6, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, Hannover.

Neubrand, Michael / Möller, Manfred (1990): Einführung in die Arithmetik. Bad Salzdetfurth, Franzbecker.

Padberg., Friedhelm (2008): Elementare Zahlentheorie, 3. erweiterte Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg,

Adressen der Autorinnen und Autoren

Prof. Dr. Susanne Prediger, Thorsten Dirks, Julia Kersting
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de