

1

2

3

4

Inhaltliches Denken ist absolut zentral, wenn nicht nur Kalkül, sondern auch Verständnis im Zentrum der Lernprozesse und ihrer Ergebnisse stehen soll. Dies gilt nicht nur für die ersten Zugänge zu einem Thema, sondern bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus. Kurzum: Inhaltliches Denken vor Kalkül, und beides immer weiter!



Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus.

So kann es aussehen...

Fast alle Zugänge zur Multiplikation und Division von Brüchen beginnen mit anschaulichen Einführungen der Operationen anhand von Bildern oder Sachproblemen, so dass inhaltliche Vorstellungen aufgebaut werden können. Doch was bleibt am Ende der Unterrichtseinheit in der Klassenarbeit übrig? Oft nur noch die Rechnungen? Dies ist insofern problematisch, als nur diejenigen Teile mathematischen Wissens und Könnens, die auch geprüft werden, als Lerngegenstand ernst genommen und nachhaltig behalten werden können.

Wie dagegen auch Aufgaben in der Klassenarbeit weiter den Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen einfordern können, zeigt die folgende, durchaus anspruchsvolle Beispiel-aufgabe (aus Prediger 2004).

Katharina hat bei ihrer Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ dividiert. Sie hat die Rechenregeln richtig angewandt und das Ergebnis 8 erhalten. Nun wundert sie sich: „Wieso kann das Ergebnis größer sein als der Dividend? Ich habe doch geteilt?“

- Was würdest Du Katharina sagen?
- Kannst Du ihre Denkweise nachvollziehen? Woran hat sie wohl gedacht?
- Wie würdest Du die Rechnung $2 : \frac{1}{4}$ so in eine Geschichte übersetzen, dass Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

Eine schwere Aufgabe? Dazu lohnt sich die Betrachtung von Lösungen von Lernenden aus Klasse 7:

- Was würdest Du Katharina sagen?

Wenn man $2 : \frac{1}{4}$ rechnet dann wird der Kehrwert gemacht und das heißt $2 \cdot \frac{4}{1} = 8$ und so hat sie das Ergebnis 8 gekriegt.

Katharina denkt nicht geteilt sondern mal genommen weil der den Kehrwert genommen hat ($2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{4}{1} = 8$).

Beim Teilen von Brüchen ist es anders als bei natürlichen Zahlen. Wenn man natürliche Zahlen teilt erhält man ein kleineres Ergebnis beim Teilen von Brüchen genau umgekehrt.

Wenn man eine Zahl mit weniger als 1 dividiert, wird der Divident größer.
 Beispiel: $1:2 = 0,5$ + Desto kleiner der Divident, desto größer ist das Ergebnis!
 $1:1 = 1$
 $1:0,5 = 2$

Wenn man $2: \frac{1}{4}$ teilt dann bringt man 8 Teile raus nicht 8 ganze

b) Kannst Du ihre Denkweise nachvollziehen? Woran hat sie wohl gedacht?

Ja, weil ich genauso denke!
 Ich z.B. denke $48:2 = ?$ da kann sie ja auch nicht maximal 105 werden also größer!

Wenn man eine natürliche Zahl mit einer natürlichen Zahl ~~restlos~~ dividiert, dann wird das Ergebnis immer kleiner!

was ja können ich, sehr gut sogar dem selben Fehler habe ich auch gemacht, bei der Arbeit wo ich eine vier hätte, wenn nicht wenn ich bei gleichbleibendem Zähler teile wird das Ergebnis auch immer größer also... wieso ist es bei den Brüchen anders?

Sie hat geachtet sein 8 ganze es sind aber nur 8 Stücke Viertel

c) Wie würdest Du die Rechnung $2:\frac{1}{4}$ so in eine Geschichte übersetzen, dass Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

Man muss 2 in einen Bruch machen und das heißt $\frac{2}{1}$ danach anstatt 1 geteilt mal rechnen und noch die $\frac{1}{4}$ umdreht zu $\frac{4}{1}$ und dann nicht die Aufgabe so aus $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8$.

Wenn man 2 Äpfel jeweils viertelt, dann erhält man 2 mal 4 Stücke.
 Zusammen: 8 Stücke
 Kurz: $2 \text{ Äpfel} : \frac{1}{4} = 8 \text{ Stücke}$

In einem Wasser Kanister passen $\frac{1}{4}$ Liter Wasser in eine Glas passen $\frac{1}{4}$ Liter Wasser wie viele Gläser Wasser passen in dem Kanister?

Man teilt $\frac{1}{4}$ in 4 Viertel und die andere 1 in Viertel so kriegt man 8 Viertel raus. Sie dachte es seien 8 ganze.

So tragfähige und so überraschende Vorstellungen wie hier in den letzten drei Antworten zu c) können Schülerinnen und Schüler aktivieren, bei denen das inhaltliche Denken gepflegt wurde! Sie erklären, wieso eine Zahl beim Teilen größer werden kann, hier hilft also das Vorstellen zum Verstehen. Wer dagegen immer nur kalkülorientiert rechnet, hat für ein Ringen um das Verstehen eines erstaunlichen Phänomens ein zu eingeschränktes Repertoire, dies zeigt die erste Antwort zu c).

Dass eine solche Aufgabe auch hilft, um diese Ebenen der eigenen Vorstellungen und Interpretationen explizit anzusprechen, zeigen die metakognitiv orientierten Antworten zu b).

Was dahinter steckt...

Das Problem

Um die Herausforderung des Aufbaus inhaltlicher Vorstellungen zu verdeutlichen, sollen diese reichhaltigen Lösungen der Siebtklässlerinnen und Siebtklässler bei der Klassenarbeit mit zwei anderen Situationen kontrastiert werden.

Beispiel 2: Wim Thielke und das Dividieren durch Brüche

„Was ist 30 durch $\frac{1}{2}$?“ – So fragte Wim Thielke in der Rate-Sendung „Der große Preis“. Als der bis dahin sehr erfolgreiche Kandidat passen musste, sagte der Showmaster: „60, aber fragen Sie mich bloß nicht mehr wieso.“

Wieso kann ein so gebildeter Kandidat diese elementare Aufgabe nicht lösen? Und wie kann ein Allgemeinwissen verkörpernder Showmaster sogar damit kokettieren, dass er die Lösung nicht versteht?

Selbst für diejenigen, die den Kalkül (noch?) beherrschen, ist seine zielgerechte Anwendung für Sachprobleme keine Selbstverständlichkeit, wie Beispiel 3 zeigt durch zwei Testaufgaben und den Antworten von Lisa (9. Klasse Gymnasium).

4

Beispiel 3: Multiplizieren oder Dividieren – reine Glückssache?

1 a.) Ein Kilogramm Mandarinen kosten 1,50 Euro. Kerstin will sich $\frac{3}{4}$ kg kaufen.

Mit welcher Rechnung findet sie heraus, wie viel sie zahlen muss? (Kreuze eins oder mehrere an)

$1,5 - \frac{3}{4}$ $1,5 : \frac{3}{4}$ $\frac{3}{4} \cdot 1,5$ keines von denen, sondern so: _____

b.) Begründe Deine Antwort zu a):

Ein Kilogramm kostet 1,50 €. Kerstin will aber nur $\frac{3}{4}$ kg kaufen

2 a.) Mit welcher Rechnung kann man $\frac{2}{3}$ von 36 bestimmen? (Kreuze eins oder mehrere an)

$36 - \frac{2}{3}$ $36 : \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \cdot 36$ keines von denen, sondern so: _____

b.) Begründe Deine Antwort zu a)

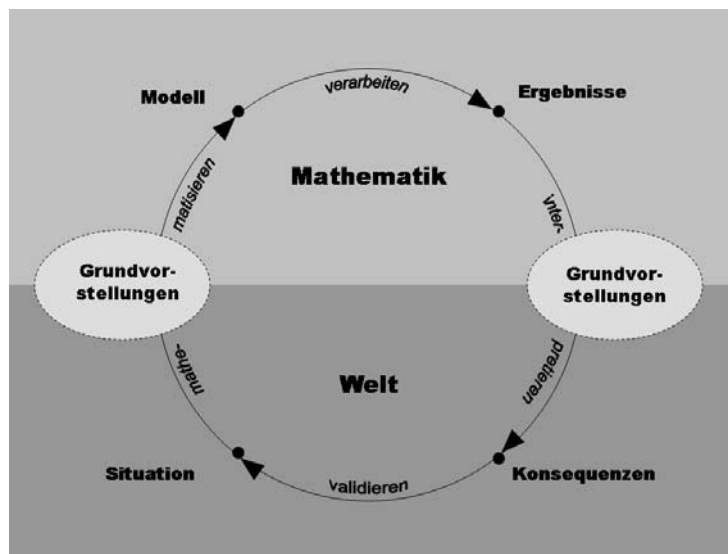
Man will ja wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ von 36 sind. Dann muss man geteilt rechnen und kriegt das Ergebnis raus.

↙ Inhaltliche Vorstellungen sind wichtig

Alle drei Momente zeigen, wie wichtig neben den Rechenverfahren auch inhaltliche Vorstellungen von mathematischen Inhalten für folgende Tätigkeiten sind:

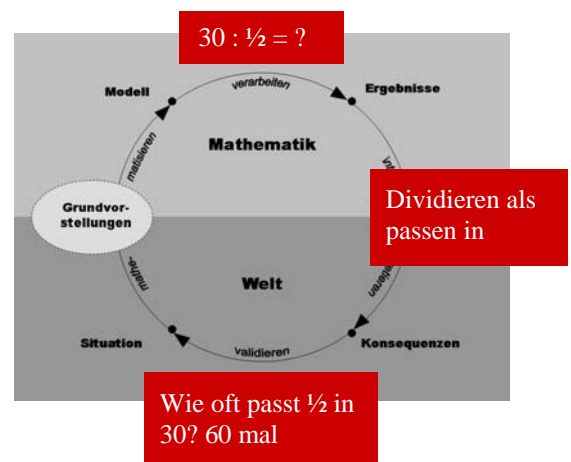
- Rechenverfahren nachhaltiger und weniger fehleranfällig behalten (wie die einfache Division von 30 durch $\frac{1}{2}$ bei Wim Thielke im 2. Beispiel)
- Operationen sachangemessen zur Mathematisierung von Situationen nutzen (wie bei den Textaufgaben im 3. Beispiel)
- Phänomene verstehen, die im Zusammenhang mit den Operationen stehen (die wie Ordnungseigenschaft der Division in der Klassenarbeit im 1. Beispiel)

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden inhaltliche Vorstellungen mit dem Konzept der Grundvorstellungen beschrieben. Grundvorstellungen bezeichnen inhaltliche Interpretationen mathematischer Objekte (d.h. Begriffe, Operationen etc.) und ermöglichen, mathematische Begriffe oder Operationen zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu interpretieren (vgl. nebenstehende Abbildung aus vom Hofe 2003).



So verfügt etwa Lisa in der zweiten Aufgabe des 3. Beispiels nicht über die für die jeweilige Aufgabenstellung nötige Grundvorstellung vom Multiplizieren als „Anteilnehmen-von“. Daher kann sie die Textaufgabe zwar durch mehrschrittige Rechnung lösen, aber die Situation nicht multiplikativ mathematisieren. Stattdessen aktiviert sie wie viele ihrer Klassenkameraden eine hier unpassende Deutung der Division über das Schlüsselwort „von“. In der ersten Aufgabe wirft Lisa sogar die eigentlich verfügbare Grundvorstellung vom Multiplizieren über Bord, um stattdessen an der Ordnungseigenschaft „Multiplizieren vergrößert“ festzuhalten. Ohne adäquat aufgebaute inhaltliche Vorstellung droht diese Ordnungseigenschaft ein Übergewicht zu erfahren.

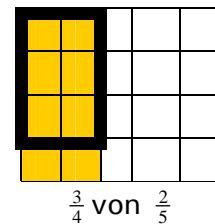
Zu den meisten mathematischen Objekten gibt es mehr als eine relevante Grundvorstellung, aus denen jeweils situativ die richtige ausgewählt werden muss. Katharina (in der Aufgabe des Beispiel 1) ebenso wie Wim Thielke (im Beispiel 3) verstehen die Divisionsaufgabe nicht, weil sie auf die Grundvorstellung der Division als Verteilen fixiert sind. Wer dagegen - wie einige der Schüler in den Antworten auf die Testaufgaben des ersten Beispiels - die Division als „passen in“ interpretieren kann, kann sowohl seine Ordnungsvorstellungen vom Dividieren revidieren („Dividieren verkleinert doch nicht immer!“), als auch langfristig die Aufgabe $30 : \frac{1}{2}$ lösen, selbst wenn die Rechenregeln längst wieder vergessen sind.



↙ Inhaltliche Vorstellungen werden nicht automatisch aufgebaut

Viele empirische Untersuchungen haben allerdings gezeigt, dass inhaltliche Vorstellungen nicht automatisch aufgebaut werden, im Gegenteil: Lernende zeigen Schwierigkeiten beim Mathematisieren und beim Interpretieren mathematischer Sachverhalte, die sich oft auf ein eingeschränktes Repertoire von Grundvorstellungen zurückführen lassen. Dies gilt nicht nur für die Bruchrechnung, sondern für viele mathematische Themengebiete (Weitere Beispiele finden sich im Material auf der CD). Nur ein Unterricht, der gezielt am Aufbau adäquater Vorstellungsrepertoires arbeitet, kann dem entgegen wirken. Beispiele für solche Unterrichtskonzepte findet man beispielsweise bei Malle (2004) oder vom Hofe (2003).

Es stellt sich allerdings die Frage: „Bauen wir im Unterricht nicht eigentlich immer schon Vorstellungen auf?“ Die meisten Schulbücher liefern durchaus Material, das für den Vorstellungsaufbau gedacht ist: Fast immer werden in Einstiegsaufgaben neue mathematische Objekte durch Anknüpfung an lebensweltliche Zusammenhänge oder Bilder eingeführt.



So hat sich etwa für das Multiplizieren von Brüchen die Veranschaulichung der Grundvorstellung des „Anteil-Nehmen-von“ in Rechteckbildern etabliert, die eine tragfähige Basis bilden kann. Die Aufgabe, einen Anteil von einem Anteil zu bestimmen, kann in plausibler Weise zur Multiplikation führen.

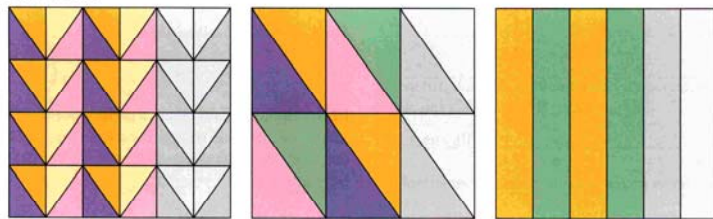
Leider wird aber der Übergang von solchen vorstellungsorientierten Einstiegsaufgaben hin zu denkentlastenden Kalkülen in vielen Lehrgängen sehr schnell vollzogen. „Zugänge“ sind eben dafür da, so schnell wie möglich verlassen zu werden – wer bleibt schon gern im Zugang stehen?

Dies zeigt sich exemplarisch an der Schulbuchseite (aus „Zahlen und Größen 6“, Cornelsen Verlag 1998, S. 40), bei der man (auch ohne Details zu erkennen) schnell den Grundaufbau erfasst.

Die Seite nähert sich dem Thema Erweitern und Kürzen von Brüchen inhaltlich: Anhand verschiedener Darstellungen für den gleichen Anteil (an den gefärbten Tei-

Kürzen und Erweitern von Brüchen

Petra, Birgit und Susanne stellen gemeinsam diese drei Decken her. Sie haben die Arbeit gleichmäßig verteilt. Jedes Mädchen stellt ein Drittel jeder Decke her. Petras und Birgits Anteile sind schon fertig.



Vergleicht man die fertigen Teile der Decken, so sieht man:

$$\frac{32}{48} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir erhalten Brüche, die zwar verschiedene Schreibweisen, aber den gleichen Wert haben. Eine andere Schreibweise findet man z. B. so:

$$\frac{32}{48} = \frac{32 : 4}{48 : 4} = \frac{8}{12} \quad \text{oder} \quad \frac{8}{12} = \frac{8 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{32}{48}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{8 : 2}{12 : 2} = \frac{4}{6} \quad \text{oder} \quad \frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12}$$

Man erhält verschiedene Schreibweisen eines Bruches, indem man

- Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert, d. h. den Bruch **kürzt**;
 - Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert, d. h. den Bruch **erweitert**.
- Der Wert des Bruches bleibt in jedem Fall gleich.

Übungen

1 Bestimme die Zahl, mit der gekürzt bzw. mit der erweitert wurde.

- a) $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot x}{6 \cdot x} = \frac{2}{3}$ f) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{24}{36}$
 b) $\frac{24}{36} = \frac{24 \cdot x}{36 \cdot x} = \frac{4}{6}$ g) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{8}{12}$
 c) $\frac{8}{12} = \frac{8 \cdot x}{12 \cdot x} = \frac{2}{3}$ h) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot x}{7 \cdot x} = \frac{32}{56}$
 d) $\frac{16}{32} = \frac{16 \cdot x}{32 \cdot x} = \frac{2}{4}$ i) $\frac{8}{9} = \frac{8 \cdot x}{9 \cdot x} = \frac{48}{54}$
 e) $\frac{45}{20} = \frac{45 \cdot x}{20 \cdot x} = \frac{9}{4}$ j) $\frac{12}{17} = \frac{12 \cdot x}{17 \cdot x} = \frac{60}{85}$

2 Gib eine andere Schreibweise an, indem du mit 5 kürzt.

- a) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{35}{45}$ e) $\frac{10}{35}$ g) $\frac{20}{30}$ i) $\frac{80}{95}$
 b) $\frac{40}{100}$ d) $\frac{50}{30}$ f) $\frac{65}{75}$ h) $\frac{45}{60}$ j) $\frac{105}{125}$

3 Gib eine andere Schreibweise an, indem du mit 3 erweiterst.

- a) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{6}{11}$ g) $\frac{9}{2}$ j) $\frac{5}{3}$ m) $\frac{20}{25}$
 b) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{5}$ k) $\frac{10}{2}$ n) $\frac{31}{25}$
 c) $\frac{8}{13}$ f) $\frac{12}{17}$ i) $\frac{15}{26}$ l) $\frac{13}{8}$ o) $\frac{66}{47}$

len der Deckenausschnitte) können die Lernenden zunächst erleben, dass es gleichwertige Brüche gibt: „Wir erhalten Brüche, die zwar verschiedene Schreibweisen, aber den gleichen Wert haben.“

Danach wird das Erweitern und Kürzen als Verfahren auf der Kalkülebene eingeführt, die es auch ohne das Zeichnen von Bildern oder das Nachdenken über Anteile ermöglicht, zu einem Bruch einen gleichwertigen zu finden: „Eine andere Schreibweise findet man z.B. so.“

Der grundsätzliche Weg vom Inhaltlichen zum Kalkül ist sinnvoll, auch wenn auf dieser Schulbuchseite das Einstiegsbeispiel noch zielführender angelegt werden könnte. Das Tempo des Übergangs dagegen ist ausgesprochen problematisch, das Schulbuch gönnt sich dafür nur eine halbe Seite! Entlarvend ist auch, dass danach ausschließlich der Kalkül geübt wird, während weder der inhaltliche Begriff der Gleichwertigkeit noch die Vorstellungen des Verfeinerns und Vergröbern in den Rechenaufgaben noch einmal aktiviert werden. Wer jedoch den Lernenden nur ein oder zwei Aufgaben mit Bezug zu inhaltlichen Vorstellungen anbietet und dann unwiederbringlich zum Kalkül übergeht, darf sich nicht wundern, dass die Brücke zum inhaltlichen Denken bei vielen Lernenden abbricht.

Deswegen kommt es nicht nur auf die Qualität des Zugangs an, sondern auch darauf, die Vorstellungsorientierung weiter aufrecht zu erhalten, nicht statt Kalkül, aber immer wieder in Ergänzung dazu.

↙ Wege zur Stärkung des inhaltlichen Denkens

Die Kritik an der exemplarischen Schulbuchseite weist bereits den Weg zur Veränderung, für den es zwei zentrale Strategien gibt (vgl. Prediger 2009):

- Länger im Inhaltlichen verweilen, so dass die Lernenden mit dem neuen Inhalt zunächst Vertrautheit gewinnen können und selbst ein Bedürfnis nach denkentlastenden Abkürzungen empfinden. Dann kann nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung ein Kalkül erarbeitet werden.
- Auch nach Einführung des Kalküls immer wieder die Rechnungen an inhaltliche Denkweisen rückbinden, damit der Bezug nicht verloren geht: In Übungsaufgaben und in der Klassenarbeit.

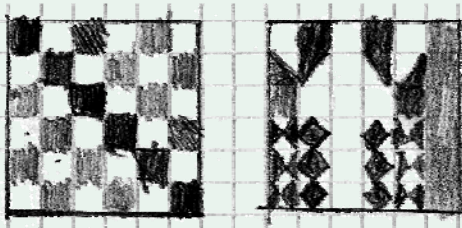
Wie kann die Umsetzung dieser Prinzipien für das Erweitern und Kürzen von Brüchen aussehen? Zunächst müssen Aufgaben gestellt werden, die ganz im Inhaltlichen verweilen (Aufgabe 1), danach kann der Bezug zwischen Formalem und Inhaltlichem hergestellt werden (Aufgabe 2).

1) Stelle verschiedene Gesichter von $\frac{1}{2}$ her!

2) Kannst Du erklären, was es bedeutet, dass zwei Brüche gleichwertig sind?

Lösungen zu Aufgabe (1) sehen etwa so aus:

Robert



Anna



Steffen

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$$

Wenn ich eine halbe Pizza habe kann man sie durch beliebig viele Kinder teilen. Je mehr Kinder sich eine halbe Pizza teilen müssen, desto kleiner werden die Stücke.

Dies sind Lösungen zu Aufgabe (2)

4. Kannst Du erklären, was es bedeutet, dass zwei Brüche gleichwertig sind?

• Male ein Bild, das erklärt, wieso $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ gilt.



• Erkläre auch mit Hilfe einer Pizza-Verteilungssituation:

$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, denn ... wenn man genau hin sieht sind das einfach mal 2 von der ersten aufgabe und weil man dann was das 16 halt so groß ist wie 8 muss man einfach die anzahl der stücke mal 2 nehmen

Kannst Du erklären, was es bedeutet, dass zwei Brüche gleichwertig sind?

• Male ein Bild, das erklärt, wieso $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ gilt.



• Erkläre auch mit Hilfe einer Pizza-Verteilungssituation:

$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, denn ... wenn bei 3 Pizzen auf 8 Kinder bekommt jedes so viel wie bei 6 für 16 Kinder

Wenn der Kalkül erarbeitet ist, muss er geübt werden. Es kann dabei immer mal wieder der Bezug zum Inhaltlichen hergestellt werden:

3) Wie viele Zehntel sind $\frac{3}{5}$? Rechne aus und erkläre deine Rechnung in einem Bild.

4) Stelle eine Textaufgabe, die zu der Rechnung $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ passt

Gerade die wiederholte Aufforderung zum eigenständigen Formulieren von Textaufgaben oder Rechengeschichten hat sich bewährt, um die Verbindung des Kalküls zum Inhaltlichen aufrechtzuerhalten (Prediger 2006).

Ernst nehmen bis zum Schluss: Vorstellungsorientierte Klassenarbeiten

Die im ersten Beispiel vorgestellte vorstellungsorientierte Aufgabe ist ein sehr anspruchsvolles Beispiel für die Überprüfung der Verfügbarkeit inhaltlicher Vorstellungen, weil der Zweck der Aktivierung anspruchsvoll ist, nämlich die Widerlegung einer vermuteten Gesetzmäßigkeit zu den Ordnungseigenschaften der Division von Brüchen.

Viele leichtere Varianten sind möglich und sollten auch immer vorkommen:

- Stelle selbst eine Textaufgabe zu der Rechnung...
- Bestimme das Ergebnis ohne zu rechnen, z. B. durch ein Bild oder eine Geschichte ...
- Gegeben ist eine Sachsituation, mit welcher Rechnung könnte man sie erfassen?
- Anna hat die Rechenregel vergessen, wie kann sie sie sich wieder überlegen, wenn sie sich was dazu vorstellen kann?

Ein Bauer möchte 120 Liter Milch in $\frac{1}{2}$ Liter-Flaschen füllen. Wie viele Flaschen



braucht der Bauer? (Schreibe deine Rechnung bitte mit auf!)

Braucht der Bauer mehr oder weniger Flaschen,

wenn er die Milch in $\frac{3}{4}$ Liter-Flaschen füllen

würde? (Versuche diese Frage zuerst ohne Rechnung zu beantworten! Begründe!)



120 : 2 = 240, weil in eine Flasche ja nur die Hälfte jedes Liters passt.

Er braucht weniger Flaschen, weil $\frac{3}{4}$ mehr als $\frac{1}{2}$ ist, also auch mehr hinein passt.



Diese Aufgabe kann zum Aufbau geeigneter Vorstellungen beitragen, denn die Frage, wie oft ein halber Liter in 120 l passt, kann mit der Division verknüpft werden. Die Frage, ob $120 : \frac{1}{2}$ oder $120 : \frac{3}{4}$ mehr ist, ist durch ihr explizites Verbot zum Rechnen ein guter Anlass zur Aktivierung inhaltlichen Denkens, das schließlich zu den Leistungen wie im erstem Beispiel führen kann.

↙ Und das Ergebnis?

„Bei Ihnen müssen wir immer so viel denken, können wir nicht einfach mal nur rechnen? Das ist weniger anstrengend!“ Diesen Vorwurf muss sich schon anhören, wer inhaltliches Denken bis zum Schluss ernst nimmt, denn in der Tat ist das zeitweise Abweichen vom denkentlastenden Kalkül immer auch eine Anstrengung.

Dass sie sich dennoch lohnt, zeigen zahlreiche Unterrichtserfahrungen und empirische Untersuchungen, weil die mathematischen Kenntnisse nachhaltiger erworben und behalten werden können, wenn sie auf Verständnis gründen.

So kann man (sich) fortbilden...

Für Fortbildungen zum inhaltlichen Denken hat es sich bewährt, zunächst für die Problematik nicht tragfähiger Vorstellungen zu sensibilisieren, die zwar prinzipiell bekannt ist, in der Tragweite jedoch oft unterschätzt wird. Dazu eignen sich schriftliche Produkte von Lernenden aus verschiedenen mathematischen Themenbereichen, gerade wenn sie mit Lösungshäufigkeiten größerer Schülerzahlen unterlegt sind. So aufgerüttelt, kann das didaktische Konzept der Grundvorstellungen als theoretischer Hintergrund vorgestellt werden, der hilft, die Herausforderungen genauer zu verorten.

Als zentrale Strategie gegen die Vernachlässigung inhaltlichen Denkens ist das „Zugänge weiter führen“ gut vermittelbar, für alle Schritte sind auf der CD Materialien zusammengestellt.

10

Zum Weiterdenken und -arbeiten...

↙ ...mit der CD

Um den Einstieg in die Thematik möglichst zugänglich zu gestalten, wurde auf der CD vielfältiges Material für Fortbildungen oder schulinterne Beratung zum Thema zusammengestellt, darunter Antworten von Lernenden zu Brüchen, Termen, Funktionsgleichungen, Folien zur Vorstellung der didaktischen Konzepte und Ansätze, Materialien zur eigenständigen Arbeit und Hintergrundtexte.

↙ ...mit der Literatur

Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen, in: Mathematik lehren 123, S. 4-8.

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?, in: Mathematik lehren 123, S. 10-13.


Prediger, Susanne (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben, in: Praxis der Mathematik in der Schule 48 (2006) 11, S. 8-12.

Prediger, Susanne (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül, erscheint in: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Arithmetikunterricht in der Sekundarstufe I (Arbeitstitel), Beltz Verlag, Weinheim.

vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: Mathematik lehren 118, S. 4-8

Dieser Artikel ist eine nicht zitierfähige Vorabversion des Beitrags

Prediger, Susanne (2009): Verstehen durch Vorstellen.
Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus,
in: Leuders, Timo / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Weigand, Hans-Georg (Hrsg.):
Mathemagische Momente, Cornelsen, Berlin, 166-175.



Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Erforschung und
Entwicklung des
Mathematikunterrichts Dortmund
prediger@math.tu-dortmund.de