

Susanne PREDIGER, Dortmund

## **Zur Bedeutung vielfältiger Theorien und wissenschaftlicher Praktiken in der Mathematikdidaktik am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben**

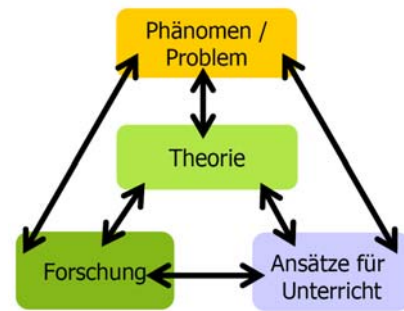
### **1. Theorien und wissenschaftliche Praktiken**

Die internationale Diskussion über die Rolle von Theorien für die mathematikdidaktische Forschung ist ebenso wie die der allgemeinen Wissenschaftstheorie geprägt von unterschiedlichen Verständnissen des Theoriebegriffs „in Abhängigkeit von den Grundpositionen“ (Thiel 1996, 266, ebenso für Mathematikdidaktik bei Assude et al. 2008). Üblich in der Wissenschaftstheorie ist eine Charakterisierung von Theorien hinsichtlich ihrer Funktionen, z.B. als „sprachliches Gebilde, das in propositionaler oder begrifflicher Form die Phänomene eines Sachbereichs ordnet und [ermöglicht,] die wesentlichen Eigenschaften der ihm zugehörigen Gegenstände und deren Beziehungen untereinander zu beschreiben, allgemeine Gesetze für sie herzuleiten sowie Prognosen über das Auftreten bestimmter Phänomene ... aufzustellen“ (Thiel 1996, 262). Assude et al. (2008) sprechen bei diesem Theoriebegriff von „theories as objects of research“.

Forschung wird in diesem Artikel in sozialer Perspektive konzeptualisiert als stets verortet in *communities of practice* (Wenger 1998). Diese Perspektive schließt an Konzeptualisierungen von Wissenschaftsdisziplinen als Wissenschaftskulturen an (Arnold/Fischer 2004, aber auch schon Fleck 1935), erfasst jedoch die kleineren Einheiten von Forschungsgruppen oder wissenschaftlichen Schulen *innerhalb* einer Disziplin adäquater. Wie Wissenschaftskulturen definieren sich wissenschaftliche Schulen als *communities of practice* nicht nur über *sozial geteilte Erkenntnisse* (z.B. akzeptierte Theorien, Konstrukte und Aussagen sowie empirische Befunde), sondern auch über ihre *Arbeitsformen* (akzeptierte Erkenntnisweisen, Untersuchungsdesigns, Methoden etc.), *soziale Aspekte* der Community (wie Rollen, Habitus und Spielregeln, Mechanismen der Initiation usw.) und vor allem *implizite und explizite theoretische Grundannahmen*, die die sozial geteilten Forschungs- und Entwicklungspraktiken prägen und eingrenzen (*Hintergrundtheorien* im Sinne von Mason/Waywood 1996). Hintergrundtheorien umfassen ontologische Aspekte (bzgl. der Abgrenzung und Natur des Gegenstandsbereichs), epistemologische Aspekte (Annahmen zu Erkenntnisweisen und Wahrheitsgehalten) sowie Normen über wissenschaftliche Praktiken (vor allem bzgl. Zielsetzungen und Intentionen, paradigmatische Forschungsfragen und Qualitätskriterien). Solche Hintergrundtheorien bezeichnen Assude et al. als „theories as tools“ (2008), was aufgrund

des zugrunde gelegten weiten Werkzeugbegriffs mit Theorien als Erkenntnisbedingung übersetzt werden sollte.

Silver und Herbst (2007) haben herausgearbeitet, dass mathematikdidaktische (Vorder- und Hintergrund-) Theorien nicht nur zum Erfassen empirischer Phänomene dienen, sondern auch zwischen Forschung und Unterrichtspraktiken vermitteln, indem sie eine “language of descriptions of an educational practice” oder ein “system of best practices” bieten (S. 50). Zwischen empirischen Problemen und der Unterrichtspraxis vermitteln Theorien, indem sie Lösungsvorschläge für Probleme bieten oder ein “tool which can help design new practices” (S. 59). Während Silver und Herbst (2007) einzelne Theorien auf den unterschiedlichen Achsen des Diagramms verorteten, wird hier der Standpunkt eingenommen, dass jede wissenschaftliche Praxis implizit alle drei Achsen tangiert.



## 2. Umgang mit Textaufgaben als Beispielfeld für Vielfalt von wissenschaftlichen Praktiken in der Mathematikdidaktik

### *Problem der wohl bekannten Busaufgabe*

„1128 Schülerinnen und Schüler einer Schule sollen von der Schule aus zu einer Sportveranstaltung fahren. Ein Schulbus kann 36 Schülerinnen und Schüler befördern. Wie viele Busse sind nötig, um alle Schülerinnen und Schüler zu der Veranstaltung zu bringen?“

Diese Variante der oft diskutierten Busaufgabe war Bestandteil der Lernstandserhebung 9 in NRW 2004. Sie wurde in der Pilotierung von 38 % der Befragten korrekt gelöst, 23 % rundeten die berechneten  $1128 : 36 = 31,33$  falsch, ca. 40 % hatten andere falsche Lösungen. Das Original aus dem 3<sup>rd</sup> NAEP National Assessment wurde 1982 in den USA von 23 % der Befragten korrekt gelöst, 19 % rundeten ab, 29% schrieben „31 Rest 12“, 29 % andere falsche Lösungen (Carpenter et al. 1983).

Die Entwicklung der Forschungen und Theoriebildungen rund um diese Aufgabe bietet ein interessantes Beispielfeld, um die Unterschiedlichkeit theoretischer Zugriffe und wissenschaftlicher Praktiken exemplarisch aufzuzeigen. Aus der Vielzahl der Zugänge werden vier hier über die kleinsten denkbaren theoretischen Einheiten, ihre zentralen Konstrukte, angedeutet:

### *1. Zugang: Fehlende Aktivierung von Grundvorstellungen*

Die Ergebnisse anderer Untersuchungen legen nahe, dass den 40 % bzw. 29 % falschen Lösungen neben reinen Rechenfehlern oft falsche Operationswahlen zugrunde liegen, hinter denen fehlende oder falsche Aktivierun-

gen von Grundvorstellungen zu vermuten sind. Die Relevanz dieses aus stoffdidaktischer Tradition stammenden theoretischen Konstrukts zur Analyse und Prognose von Schwierigkeiten bei Aufgaben mit Mathematisierungsanforderungen wurde in zahlreichen qualitativen und quantitativen Untersuchungen gezeigt (insbesondere Blum et al. 2004, vom Hofe 1995).

### 2. Zugang: Antrainierte Ausblendung realistischer Überlegungen

Besondere Aufmerksamkeit haben die 19% bzw. 23% falsche Bearbeitungen gefunden, in denen zwar richtig gerechnet, dann aber ab- statt aufgerundet wurde, weil die mathematischen Rundungsregeln dies nahelegen. Hier ist eine Validierung des Ergebnisses in Bezug auf die Sachsituation vermutlich nicht erfolgt. Analysen der Hintergründe dieser Ausblendung realistischer Überlegungen durch Interviewstudien weisen auf einen erlernten Umgang mit eingekleideten Textaufgaben im Unterricht hin (Verschaffel et al. 2000).

### 3. Zugang: Interventionsstudie zur Behebung des Defizits

Dass die Einbeziehung realistischer Überlegungen trainierbar ist, hat Renkl (1999) mit einer Interventionsstudie zu zeigen versucht, in der Viertklässler in 3x 45 min. für die möglichen Fallen solcher Aufgaben sensibilisiert wurden. Nachweisen konnte er signifikant bessere Leistungssteigerungen der Experimentalgruppe gegenüber der Kontrollgruppe.

### 4. Zugang: Soziomathematische Normen im Mathematikunterricht

Das Problem des Nicht-Einbezugs realistischer Überlegungen lässt sich nicht nur in der kognitiven Konstitution der Lernenden verorten, sondern grundsätzlicher in den im Klassenraum etablierten soziomathematischen Normen und Prozeduren im Umgang mit Textaufgaben (Neth/Voigt 1991, Chevallard 1988). Interaktionsanalysen zeigen, wie soziomathematische Normen etabliert werden, die nur bestimmte Übergänge zwischen realistischen und schulmathematischen Kontexten als legitime Praktiken konstituieren (Neth/Voigt 1991, Gellert/Jablonka 2009).

## 3. Vergleich der theoretischen Zugänge und wissenschaftlichen Praktiken

### *Vielfalt der Zugänge wichtig*

Metaphorisch lassen sich die verschiedenen Zugänge als Lupen begreifen, die unterschiedliche Ausschnitte einer komplexen Realität zu erfassen oder zu verändern ver-



suchen. Die Vielfalt der Zugänge ist wichtig, weil einzelne Zugänge allein die Komplexität des Feldes nicht erfassen könnten.

### *Unterschiedliche Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze*

Die Zugänge liefern Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze auf ganz unterschiedlichen Ebenen: der Ebene der Inhalte (Aufbau von Grundvorstellungen als wichtige Lerninhalte im *1. Zugang*), der Ebene der Aufgaben (mehr authentische realitätsbezogene statt eingekleidete Aufgaben im *2. Zugang*) und der Ebene der Unterrichtskultur (stärkerer Fokus auf unterrichtlichen Umgang mit Kontexten im *4. Zugang*). Erst alle drei Ebenen zusammen liefern ein umfassendes Unterrichtskonzept, die Vielfalt der Zugänge ist somit wichtig, um der Komplexität des Unterrichtsgeschehens gerecht werden zu können.

Der *3. Zugang* hat die unterrichtlichen Handlungsmöglichkeiten direkt zum Forschungsgegenstand gemacht, hätte aber kritische Auswirkungen, wenn er so verstanden würde, dass der Einbezug realistischer Überlegungen kurzfristig und isoliert trainierbar wäre. Hier zeigt sich die Notwendigkeit einer angemessenen Interpretation des Geltungsanspruchs von Interventionsstudien für die Unterrichtspraxis.

### *Konstituierung der Forschungsgegenstände durch Fokus der Forschung*

Die Lupenmetapher und die dargestellten unterschiedlichen Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze würden zu kurz greifen, wenn nicht die Grenze der Lupenmetapher transzendiert würde: Die unterschiedlichen theoretischen Zugriffe erfassen nicht verschiedene Ausschnitte *derselben* Realität, stattdessen *konstituieren* die theoretischen Zugriffe durch entsprechende Konzeptualisierung überhaupt erst ihre Forschungsgegenstände: “indeed, theoretical constructs act to bring these objects (to be studied) into being.” (Mason/Waywood 1996, 1058).

Im *1. Zugang* wird in stoffdidaktischer Perspektive Grundvorstellungsintensität als schwierigkeitsgenerierendes Aufgabenmerkmal konzeptualisiert, deren erklärende Kraft im large scale assessment mittels Varianzaufklärung nachgewiesen wird (s.o.). In kognitiver Perspektive wird eine fehlende Aktivierung von Grundvorstellungen als *bereichsspezifisches Defizit* der Einzelnen gefasst, mit dem (im Gegensatz etwa zur Lokalisierung der Schwierigkeit in der Lesekompetenz) nicht nur ein mathematik-, sondern auch gegenstandsspezifischer Forschungsgegenstand geschaffen wird.

Im *2. Zugang* dagegen werden, ebenfalls in *kognitiver Perspektive*, aber unter Einbezug des Unterrichtskontexts, die Schwierigkeiten vorrangig in erwartungswidrigem *Verhalten* der bereichsunabhängigen Ausblendung

realistischer Überlegungen verortet. Werden diese zurück geführt auf den unterrichtlichen Umgang mit eingekleideten Aufgaben, so wird Lernen als Prozess in unterrichtlichem Kontext konzeptualisiert, der eine Erklärung für Defizite in einer ungeeigneten Aufgabenauswahl im Unterricht bietet.

Wenn der 3. *Zugang* mit einer Interventionsstudie zu zeigen versucht, dass der Einbezug realistischer Überlegungen trainierbar ist, so verortet er Schwierigkeiten mit Textaufgaben dagegen wie der 2. *Zugang* in *kognitiver Perspektive* bei den Lernenden, hier allerdings als bereichsübergreifendes, kurzfristig behebbares Defizit.

Die Erklärungsrichtung des 2. *Zugangs* wird im 4. *Zugang* aus *sozialer Perspektive* weiter geführt, die die Schwierigkeit fasst als Nicht-Passung zwischen den im Unterricht etablierten *soziomathematischen Normen* im Umgang mit Textaufgaben und den Erwartungen im Test. Noch konsequenter als im 2. *Zugang* werden Schwierigkeiten hier nicht den Individuen zugewiesen, sondern in der Unterrichtsinteraktion verortet. Mit dem erschließenden Konstrukt der soziomathematischen Normen (Yackel/Cobb 1996 oder dem des didaktischen Kontrakts von Chevallard 1988) wird ein Forschungsgegenstand erst etabliert, für den zuvor keine Sprache vorhanden war. Dieser Fokus auf Unterrichtsinteraktionen war Voraussetzung für die Wahrnehmung der Bedeutung von Fragen der Unterrichtskultur.

Insbesondere am Konstrukt der Grundvorstellungen und dem der soziomathematischen Normen zeigt sich die Kraft von „ontological innovations“ (DiSessa/Cobb 2004). Wenn die Vordergrundtheorie dadurch die Erfassung neuer Phänomene ermöglicht, ist der Zugewinn gegenüber theorie-ärmeren Analysen evident.

Innovative Konstrukte der Vordergrundtheorie sind jedoch immer auch eingebettet in bestimmte Hintergrundtheorien, die die wissenschaftlichen Praktiken begrenzen. So ist etwa das Konstrukt der soziomathematischen Normen (Yackel/Cobb 1996) eingebettet in die theoretische Perspektive des symbolischen Interaktionismus mit ihrem Fokus auf Interaktionenssituationen (Neth/Voigt 1991). Sie ermöglicht die Rekonstruktion der situativen Emergenz von Normen und bezieht dabei immer auch die Binnenperspektiven der Akteure ein. An Grenzen stößt der Interaktionismus bzgl. individueller Vorstellungen einzelner Akteure oder bzgl. längerfristiger Prozesse statt Mikro-Situationen.

### *Forschungsfragen - Forschungsmethoden*

Der Vergleich der Zugriffe zeigt die Weite des Spektrums möglicher Forschungsmethoden und somit Erkenntnisweisen, die jeweils begrenzen, welche Forschungsfragen formuliert werden können. So sind unterrichtliche

Ursachen der Ausblendung realistischer Überlegungen erst ins Blickfeld geraten, als Lernende in Interviews bzgl. der Ursachen ihrer Handlungen befragt wurden, während Leistungsstudien mit großen Fallzahlen dies nicht erheben konnten (Verschaffel et al. 2000).

Allgemein sind Unterschiede zwischen quantitativen und qualitativen Forschungsmethoden in breit geführten Methodendiskussionen immer wieder dargestellt worden, darauf kann hier nur verwiesen werden (Lamnek 1995). Interessant ist darüber hinaus die Rekonstruktion der dahinter liegenden impliziten theoretischen (insbesondere ontologischen und epistemologischen) Grundannahmen, die auf wichtige Aspekte der Hintergrundtheorien verweisen. Ein eindrucksvolles Beispiel für die Denkstilgebundenheit (Fleck 1935) wissenschaftlicher Praktiken gibt Cobbs (2007) kritische Rekonstruktion ontologischer Grundannahmen der (oft als theorieunabhängig bezeichneten) Interventionsstudien der experimentellen Psychologie.

*Zwischenfazit: Vielfalt theoretischer Zugriffe und wiss. Praktiken*

Was und wie man beforscht, hängt von den wissenschaftlichen Praktiken ab, in denen man partizipiert (entweder bewusst gewählt oder hinein sozialisiert). Der Vergleich zeigt, dass diese nicht nur durch Methoden und Methodologien, sondern durch alle oben aufgeführten Bestandteile wissenschaftlicher Praktiken erheblich geprägt sind, vor allem durch als relevant betrachtete Forschungsfragen, theoretische Grundannahmen und Werte sowie spezifische Praktiken, die eigenen Forschungsergebnisse für Unterrichtspraxis fruchtbar zu machen.

Diese Unterschiede wahrzunehmen und sich im Spektrum der Möglichkeiten bewusst zu positionieren, ist Aufgabe jedes reflektiert arbeitenden Mitglieds einer wissenschaftlichen Community.

#### **4. Verknüpfung vielfältiger theoretischer Ansätze aus Verantwortung für Unterrichtspraxis**

Mit jeder Forschungspraxis lassen sich nur Teilbereiche der komplexen Realität mathematischen Lehrens und Lernens erfassen, angesichts der Komplexität des Forschungs- und Handlungsfeldes wäre daher eine Vereinseitigung der Forschungspraktiken nicht wünschenswert. Deswegen ist die Arbeit der Theory Working Group der CERME-Konferenzen 4-6 geprägt von dem Motto „Diversity is richness!“ (Bikner-Ahsbahr/Prediger 2006, S. 54, Diskussionsstand dokumentiert in Prediger et al. 2008).

Die Gruppe arbeitet jedoch gerade deswegen intensiv, weil eine Würdigung der Pluralität nicht mit Beliebigkeit verwechselt werden darf. Folgt man wie die Autorin den normativen Ansprüchen einer Mathematikdidaktik als

Design Science nach Wittmann (1992) (ohne diese als kurzfristigen Utilitarismus misszuverstehen), dann trägt jede Leitung einer Forschungsgruppe Verantwortung für die Relevanz der eigenen Arbeit für Unterrichtspraxis. Daraus ergibt sich die zu bearbeitende Frage, wie die vielfältigen theoretischen Zugriffe und die durch sie bedingten Ergebnisse von Forschung in der komplexen Realität des Unterrichts wieder zu verbinden sind. Denn Unterrichtspraxis allein kann nicht die Gewichtungen und Verknüpfungen vornehmen, die die Didaktik als wissenschaftliche Disziplin ausspart.

Die Vielfalt theoretischer Zugriffe und wissenschaftlicher Praktiken wird also nur dann zu einer Ressource für Reichtum, wenn die Ansätze nicht nur unverbunden nebeneinander stehen, sondern es stattdessen gelingt, Forschungsergebnisse und unterschiedliche Forschungspraktiken miteinander zu verbinden. Dazu müssen auch Theorien verbunden werden.

Ziel solcher Verknüpfungsbemühungen ist jedoch nicht eine globale Einheitstheorie, sondern viele lokale Netzwerke von Theorien. Mögliche Strategien zur Vernetzung wurden in Prediger et al. (2008) diskutiert und in Fallbeispielen ausgelotet.

Mittelfristig zu entwickeln sind umfassendere Handlungsrahmen für Unterrichtspraxis, nicht einseitige Forderungen aus sehr lokalen theoretischen Zugängen, darauf hat auch Bruder (in diesem Band) aufmerksam gemacht. Für eine solche Entwicklung ganzheitlicher Ansätze für komplexe Unterrichtsrealitäten sind neben langfristigen Projekten und Methodenmix auch kohärente Vordergrund- und Hintergrundtheorien, zunehmende Explizierung der Grundannahmen wissenschaftlicher Praktiken sowie eine ernsthafte, methodologisch reflektierte Vernetzung von Ansätzen nötig. Diesen Weg hat insbesondere die europäische Community begonnen, sollte ihn aber noch weiter gehen.

### **Literatur** (Weitere Literatur zum Vortrag auf der Homepage der Autorin)

- Arnold, Markus / Fischer, Roland (2004) (Hrsg.): Disziplinierungen. Kulturen der Wissenschaft im Vergleich, Turia & Kant, Wien.
- Assude, Teresa / Boero, Paolo / Herbst, Patricio / Lerman, Stephen / Radford, Luis (2008): The notions and roles of theory in mathematics education research, Paper presented by the survey Team at ICME 11, Mexiko 2008.
- Bikner-Ahsbals, Angelika / Prediger, Susanne (2006): Diversity of Theories in Mathematics Education - How can we deal with it?, in: ZDM 38(1), 52-57.
- Blum, Werner / vom Hofe, Rudolf / Jordan, Alexander / Kleine, Michael (2004): Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA, in: Neubrand, Michael (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. VS, Wiesbaden, 145-157.

- Carpenter, Thomas P. / Lindquist, Mary M. / Matthews, Westina / Silver, Edward A. (1983): Results of the Third NAEP Math Assessment: Secondary School, in: *Mathematics Teacher* 76 (9), 652–659.
- Chevallard, Yves (1988): Sur l'analyse didactique. Deux études sur le notions de contrat et de situation, *Publications de l'IREM d'Aix -Marseille*, 14.
- Cobb, Paul (2007): Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical perspectives, in; Lester, Frank (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, Reston, 3-38.
- DiSessa, Andrea A. / Cobb, Paul (2004): Ontological innovation and the role of theory in design experiments, in: *Journal of the Learning Sciences* 13(1), 77-103.
- Fleck, Ludwik (1935): Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und vom Denkkollektiv, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1980 (erstmalig 1935).
- Gellert, Uwe / Jablonka, Eva (2009, in Vorb.): "I am not talking about reality." Word problems and the intricacies of producing legitimate text, erscheint in: Verschaffel, Lieven et al. (Hrsg.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*, Sense Publications, Rotterdam.
- Lamnek, Siegfried (1995): *Qualitative Sozialforschung*, Bd. 1, Beltz, Weinheim.
- Mason, John / Waywood, Andrew (1996): The role of theory in mathematics education and research, in: Bishop, Alan J. et al. (Hrsg.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 1055-1089.
- Neth, Angelika / Voigt, Jörg (1991): Lebensweltliche Inszenierungen – Die Aushandlung schulmathematischer Bedeutungen an Sachaufgaben, in: Maier, Hermann / Voigt, Jörg (Hrsg.): *Interpretative Unterrichtsforschung*, Aulis, Köln, 79-116.
- Prediger, Susanne / Bikner-Ahsbans, Angelika / Arzarello, Ferdinando (2008): Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches – First steps towards a conceptual framework, in: *ZDM* 40 (2), 165-178.
- Renkl, Alexander (1999): The gap between school and everyday knowledge in Mathematics. Paper presented at the 8<sup>th</sup> EARLI Conference, Göteborg, Sweden.
- Silver, Edward A. / Herbst, Patricio G. (2007): Theory in Mathematics Education Scholarship, in: Lester, Frank K. (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, Reston, 39-68.
- Thiel, Carsten (1996): Theorie, in: Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Bd. 4, Stuttgart/Weimar, 260-270.
- Verschaffel, Lieven / Greer, Brain / De Corte, Eric (2000): Making sense of word problems, Swets & Zeitlinger, Lisse.
- vom Hofe, Rudolf (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*, Spektrum, Heidelberg.
- Wenger, Etienne (1998): *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Wittmann, Erich C. (1995). Mathematics education as a 'design science', in: *Educational Studies in Mathematics* 29(4), 355-374. (Vorversion deutsch JMD 1992)
- Yackel, Erna / Cobb, Paul (1996): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, in: *JRME*, 27, 458-477.