

Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik

Ines Fröhlich & Susanne Prediger

Vorversion des Artikels Fröhlich, Ines / Prediger, Susanne (2008): Sprichst du Mathe?
Kommunizieren in und mit Mathematik. In: Praxis der Mathematik in der Schule 49 (24), 1-8.



Zusammenfassung: Kommunikationsfähigkeit gilt als wichtige Kompetenz, deswegen muss Kommunizieren im Mathematikunterricht immer wieder gezielt angeregt werden. Im Einführungsartikel werden für unterschiedliche Lernsituationen Aufgaben und Methoden vorgestellt und an Beispielen Anforderungen für kommunikationsintensives Mathematiklernen verdeutlicht.

„Man kann nicht nicht kommunizieren“, so Paul Watzlawicks erstes Axiom der Kommunikationstheorie (Watzlawick u.a. 1969). Wenn wir aber sowieso immer schon kommunizieren, wieso sollten wir dann für Mathematikunterricht darüber nachdenken? Dieser Artikel gibt verschiedene Argumente und zeigt Wege für einen kommunikationsintensiven Unterricht auf.

Wieso auf Kommunizieren achten?

Kommunikation gelingt nicht immer optimal

Lehrerin: Na, Pippi, kannst du mir sagen, wie viel 7 und 5 ist?

Pippi: Ja, wenn du das nicht selbst weißt, so glaube nicht etwa, dass ich es dir sage.

Lehrerin: Es ist 12.

Pippi: Du wusstest es ja. Warum fragst du dann? (nach Astrid Lindgren)

Kinder lieben Pippi Langstrumpf gerade dafür, gängige Fragen zu ignorieren und in Frage zu stellen. Schon in den 1940er Jahren ließ Astrid Lindgren ihre Kinderbuchheldin mit dieser kleinen Szene die Paradoxie typischer Unterrichtskommunikation entblößen, deren Widersinnigkeit Hugo Gaudig bereits 1917 beklagte: „Die Frageform [im Unterricht] ist eine künstliche Form der Erregung geistiger Energie... Im Leben wird man nicht von jemand gefragt, der uns das wissen lassen will, was er weiß; sondern wenn man uns fragt, so will der Fragende von uns das wissen, was er nicht weiß.“ (Hugo Gaudig 1917, zitiert nach Begehr 2004, S. 21)

Seit vielen Jahren untersucht daher die Unterrichtsforschung unterrichtliche Kommunikationsstrukturen und stellt immer wieder fest, dass zwar niemals *nicht* kommuniziert wird, die Interaktion in vielen deutschen Klassenzimmern allerdings nicht immer optimal im Sinne der mathematischen Substanz verläuft (z. B. Voigt 1984, Maier/Schweiger 1999):

- Quantitativ: Lehrkräfte haben im deutschen Unterrichtsskript oft einen sehr großen Redeannteil (etwa $\frac{3}{4}$ der Zeit), während sich die Beiträge der Lernenden selbst am Gymnasium zu 63% auf Stichworte und knappe (Halb-)sätze beschränkt (Begehr 2004, S. 145/166, ähnlich bei Klieme/Baumert 2001).
- Qualitativ: Gerade im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch steht oft nicht die Sachlogik im Vordergrund, sondern die Erfüllung von Interaktionsroutinen (Voigt 1984, Begehr 2004).

Dass solche Kommunikationssituationen dem Mathematiklernen nicht zuträglich sind, hat die empirische Unterrichtsforschung wiederholt nachgewiesen (z.B. Klieme/Baumert 2001). Mit Kommunizieren muss sich also beschäftigen, wer eine *lernintensivere Unterrichtskultur* etablieren will.

Kommunizieren ist eine wichtige, aber nicht triviale Kompetenz

Kommunizieren über mathematische Zusammenhänge ist aber nicht nur mediales Vehikel zum Zweck des intensiveren Lernens, sondern selbst ein *wichtiges Bildungsziel* in einer so stark mathematisiert-technisierten Gesellschaft. Daher hat Roland Fischer sein Konzept der Höheren Allgemeinbildung an der Idee der *Kommunikationsfähigkeit mit Experten* orientiert (Fischer 2001, Peschek u.a. 2008 in PM Heft 20), und Sjuts (in diesem Heft) betont die Bedeutung des mathematischen Zugangs zur Welt.

Dies sind einige der Gründe, warum die Kultusministerkonferenz der Länder das Kommunizieren als eine von sechs prozessbezogenen Kompetenzen in die allgemeinen Anforderungen der Bildungsstandards aufgenommen hat, so dass sie nun in allen neuen Lehrplänen der Länder auftauchen (für zwei Beispiele siehe *Kasten 1*).

Trotz dieser hohen Bedeutung zeigen viele Untersuchungen, dass Lernende im Unterricht kommunikative Kompetenzen nicht im gewünschten Maß entwickeln konnten (Maier/Schweiger 1991). Es lohnt sich also, dem Thema weiter nachzugehen:

Was genau ist mit Kommunizieren gemeint?

Kommunizieren als Tätigkeit und Kompetenz in einem breiten Feld

Während der Begriff Kommunizieren auf den ersten Blick vollkommen klar erscheint, zeigt sich auf den zweiten Blick, dass damit ein ganzes Bündel verschiedener Tätigkeiten, Fähigkeiten und Kompetenzen gemeint ist, die nicht nur in den einzelnen Standard- oder Lehrplanformulierungen, sondern auch in wissenschaftlichen Publikationen völlig unterschiedlich gefasst, strukturiert und gegeneinander abgegrenzt werden.

Wir zeigen dies anhand der Lehrpläne, weil diese die Arbeitsgrundlage für den Unterricht darstellen sollen: Während die KMK Bildungsstandards (KMK 2003) Kommunizieren vom Argumentieren und vom Verwenden von Darstellungen trennen, sind in vielen Ländern alle drei Kompetenzbereiche zusammengefasst oder anders zueinander abgegrenzt (vgl. die entsprechenden Auszüge in *Kasten 1*).

Versuch der Begriffsklärung

Als vorläufiger Kern der verschiedenen Begriffsbestimmungen lassen sich folgende Fokussierungen festhalten:

- *Kommunizieren* zielt auf den Austausch zwischen Menschen mit unterschiedlichen Zielen, Mitteln und Inhalten (s. u.),
- *Präsentieren* meint die meist einseitige, oft institutionalisiertere Kommunikation mit dem Ziel des Informierens oder Überzeugens,
- *Argumentieren* fokussiert eher auf die inhaltlichen Aspekte von Kommunikationstätigkeiten mit dem Ziel des Überzeugens oder Rechtfertigens,
- *Darstellen* fokussiert auf die sprachlichen und nicht-sprachlichen Mittel beim Kommunizieren, Argumentieren, Präsentieren (aber auch Problemlösen etc.),
- von *Kooperieren* spricht man in gemeinschaftlichen Prozessen, die nicht nur dem Austausch an sich dienen, sondern der gemeinsamen Erstellung eines Produkts (etwa einer Problemlösung).

Eine solche Trennung der Tätigkeiten und Kompetenzbereiche ist für analytische Zwecke hilfreich, im Lernprozess sind sie gleichwohl meist miteinander verknüpft; so wird zum Beispiel oft mit oder gegenüber anderen argumentiert (und damit gleichzeitig kommuniziert), und für das kooperative Modellieren und Problemlösen ist eine sprachliche Verständigung eine wichtige Vorbedingung.

**Kommunizieren als Kompetenzanforderung –
Auszüge aus Bildungsstandards und Lehrplänen**



KMK Bildungsstandards für die mittlere Reife von 2003

Kommunizieren (Prozessbezogene Kompetenz K6)

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien,
- die Fachsprache adressatengerecht verwenden,
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.

Kernlehrplan Nordrhein-Westfalen (Gymnasium)



Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse		
Kommunizieren	6	arbeiten bei der Lösung von Problemen im Team
	6	sprechen über eigene und vorgegebene Lösungswege, Ergebnisse und Darstellungen, finden, erklären und korrigieren Fehler
	8	vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen
	10	überprüfen und bewerten Problembearbeitungen
Präsentieren	6	präsentieren Ideen und Ergebnisse in kurzen Beiträgen
	8	präsentieren Lösungswege in kurzen, vorbereiteten Beiträgen
	10	präsentieren Problembearbeitungen in vorbereiteten Vorträgen
Verbalisieren	6	erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln und Verfahren mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen
	8	erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen
	10	erläutern mathematische Zusammenhänge und Einsichten mit eigenen Worten und präzisieren sie mit geeigneten Fachbegriffen

Kerncurriculum Niedersachsen (Gymnasium)



Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse		
Mitteilen	6	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie auch die Fachsprache benutzen
	8	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie zunehmend die Fachsprache benutzen
	10	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen
Präsentieren	6	präsentieren Ansätze und Ergebnisse in kurzen Beiträgen auch unter Verwendung geeigneter Medien
	8	präsentieren Lösungsansätze und -wege, auch unter Verwendung geeigneter Medien
	10	präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien
Umgehen mit Ideen anderer	6	verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Richtigkeit und gehen darauf ein, äußern Kritik konstruktiv und gehen auf Fragen und Kritik sachlich und angemessen ein
	8	verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und gehen darauf ein
	10	verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein
Kooperieren	6	bearbeiten im Team Aufgaben oder Problemstellungen
	8	organisieren die Arbeit im Team selbstständig
	10	beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter

Fokus des Heftes

Da es unredlich wäre zu behaupten, man könne sich im Rahmen eines Themenheftes mit allen Aspekten von Kommunizieren hinreichend auseinandersetzen, nehmen wir für dieses Themenheft die folgende Einschränkung vor: Wir fokussieren auf *Kommunikationssituationen, in denen man sich mit einem Gegenüber (vorrangig mündlich) über Fragen, Probleme, Begründungen, Strategien, Lösungsideen, Lösungswege und Ergebnisse auseinandersetzt.*

Es sind also sowohl mündliche Sprachproduktion als auch Sprachrezeption und ihr Ineinandergreifen im Blick, weniger das Schreiben, Texte erfassen und Präsentieren. Darstellungen werden insoweit berücksichtigt, als sie für das Kommunizieren relevant sind, und gerade der Beitrag von Sjuts zeigt, wie groß das Spektrum hilfreicher Darstellung sein kann,

In diesen Fokus sind neben der *Kompetenz* (als Ziel des Lernprozesses) auch die *Tätigkeiten* des Kommunizierens (im Lernprozess) explizit einbezogen. Denn Kompetenzen erwirbt man vor allem im Tätigsein.

Wie solche Kommunikationstätigkeiten geeignet angeregt werden können, hängt natürlich auch von den jeweiligen Lernsituationen ab, deswegen sollen im Folgenden für verschiedene Lernsituationen Kommunikationsanlässe skizziert werden. Dazu gehören jeweils geeignete

- Aufgaben,
- Methoden
- sowie Medien und Moderation.

Wir fokussieren im Einführungsartikel auf Aufgaben und Methoden, die geeigneten Impulse zur Moderation sind Gegenstand zweier unterrichtspraktischer Beiträge (Götze und Scherres in diesem Heft). Dabei greifen wir bewusst auch auf Beispiele aus vorangegangenen PM-Heften zurück (vgl. Liste hinter dem Artikel).

Kaum Kommunizieren beim reinen Trainieren von Standardverfahren

Was gibt es im Mathematikunterricht schon zu kommunizieren, 15·9 ist halt 135 und $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{10}{12} = \frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}$, darüber braucht man doch nicht zu diskutieren?

In der *Phase des reinen Trainierens von Standardverfahren* gibt es in der Tat nicht mehr allzu viel zu kommunizieren: Der Austausch der Lernenden beschränkt sich meist auf einen Abgleich der Ergebnisse. Erst bei einer kooperativen Fehlersuche oder gemeinsamen Reflexion der Vorgehensweisen wird Kommunizieren interessant (s. u. Sammeln und Vergleichen).

Kommunizieren beim Erkunden

Aufgaben

Doch vor dem Abarbeiten und Einschleifen von Standardverfahren steht in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht die produktive Auseinandersetzung mit neuen Problemen, für die noch keine Standardverfahren zur Verfügung stehen, das Finden eigener Wege und Strategien zu Begriffen, Sätzen und Verfahren. In dieser *Phase des Erkundens* kann der Austausch mit anderen fruchtbar sein, vor allem im Hinblick auf das gemeinsame Finden von Ansätzen und Lösungswege. Kommunizieren steht hier im Dienste des Kooperierens, Lernende bearbeiten Aufgaben im Team und organisieren dabei ihre Arbeit möglichst selbständig (vgl. Lehrplan Niedersachsen in *Kasten 1*) – die berühmte Gruppenarbeit bei Erkundungsaufgaben. Ein simples Beispiel für Klasse 5 ist nebenstehend abgedruckt.

Nicht nur: Was ist 36:9?

Sondern auch: Welche Zahl zwischen 20 und 40 hat am meisten Teiler?

Vor allem aber: Wie sehe ich einer Zahl an, wie viele Teiler sie hat? Welchen Zusammenhang gibt es zu ihren Primfaktoren? Untersucht Beispiele und versucht, einen allgemeinen Zusammenhang zu finden.

Jede Lehrkraft, die das kooperative Erkunden im Unterricht schon einmal probiert hat, weiß allerdings, dass das Kommunizieren während Erkundungsprozessen kein Selbstläufer ist (vgl. Götze in diesem Heft für ein typisches problematisches Beispiel), selbst wenn keine großen Ansprüche an fachsprachliche Elaboriertheit gestellt werden. Es bedarf daher einer gezielten Vorbereitung durch geeignete Aufgaben, der Initiierung durch passende Methoden und der behutsamen, aber konsequenten Lernbegleitung (vgl. Richter in diesem Heft).

Nicht jede Aufgabe eignet sich zur Gruppenarbeit, einige bearbeitet man lieber allein (wie die Frage, welche Zahl zwischen 20 und 40 am meisten Teiler hat, die sich weniger ergiebig gemeinsam, sondern bestenfalls arbeitsteilig bearbeiten lässt, solange die Lernenden hier zunächst nicht strukturell argumentieren, sondern durch der Teiler die passenden Beispiele finden). Erfüllt eine Aufgabe dagegen die in *Kasten 2* genannten Kriterien 1 und 2, so ist eine fruchtbare Kommunikation eher zu erwarten, wie bei der Frage nach dem Zusammenhang zwischen Primfaktorzerlegung und Teilerzahl. (Für die weiteren Kriterien s. u.)

Anforderungen an kommunikationsanregende Mathematikaufgaben

Die Aufgabe

- ist hinreichend anspruchsvoll und komplex, so dass die Lernenden ihren Weg zur Lösung bzw. ihre Probleme mit der Aufgabe anderen in der Gruppenarbeit schildern können,
- ist herausfordernd, so dass die Lernenden einen Sinn darin sehen, mit anderen die Wege, Strategien und ggf. Ergebnisse zur Aufgabe zu diskutieren und zu überprüfen,
- lässt eine Vielfalt unterschiedlicher Lösungswege zu,
- kann auf unterschiedlichen Niveaus gelöst werden,
- fokussiert auch auf Vorstellungen und Darstellungen als zentralen Bestandteil mathematischen Denkens.

(bis auf Punkt 5 vgl. Götze 2007, S. 67)

Kasten 2

Methoden

Auch mit geeigneten Aufgaben stellt sich kooperatives Erkunden allerdings nicht immer von alleine ein: Was wenn in der Gruppe nur zwei arbeiten und die anderen sich ausruhen? Nützlich sind *methodische Arrangements*, die versuchen dies zu verhindern, indem jedes einzelne Gruppenmitglied in die Verantwortung genommen wird (vgl. Barzel/Büchter/Leuders 2007 und *Kasten 3* für einen Überblick von Beispielen, alle Methoden ohne Klammern sind durch kleine Beispiele im Text konkretisiert).

So erfordert z. B. das methodische Arrangement des *Gruppenpuzzles*, in dem zunächst in Erarbeitungsgruppen arbeitsteilig Zusammenhänge erarbeitet und dann in neu zusammengesetzten Erklärungsgruppen ausgetauscht werden, dass nach einer Erarbeitungsphase jedes Gruppenmitglied in der Lage sein muss, die Wege und Ergebnisse der Gruppenarbeit anderen zu erklären (vgl. Barzel/Büchter/Leuders 2007, S. 96ff, ausführlich beschriebenes Beispiel etwa in Richter 2005).

Statt die Verantwortung für das Ergebnis auf alle zu verteilen, können auch vorher Rollen zugewiesen werden, wie etwa bei der Methode der „*nummerierten Köpfe*“: Dabei bekommen Lernende im Vorfeld feste Rollen zugewiesen (etwa Gesprächsleitung, Protokollführung, Frageverantwortung, Zeitwache, etc.: nach eigener Wahl oder gezielt durch die Lehrkraft), so dass die individuellen Verhaltensweisen durch feste Funktionen im Team kanalisiert werden.

Wie gut die durch das methodische Arrangement verteilten Verantwortlichkeiten von den Lernenden langfristig tatsächlich übernommen werden können, wird auch durch die Moderation der Prozesse und auch die Institutionalisierung wiederholter Reflexion über das Gelingen beeinflusst (vgl. die Beiträge von Scherres und Götze, in diesem Heft).

Insgesamt bleibt zu betonen, dass das kooperative Erkunden eine durch anspruchsvolle Tätigkeit ist, und auch forschende Mathematikerinnen und Mathematiker neben diesen Phasen

immer wieder auch Phasen des individuellen Denkens brauchen. Götze (2007) zeigt, dass viele (Grundschul-)Kinder mit dem kooperativen Problemlösen überfordert scheinen und schlägt vor, die *Kommunikation schwerpunktmäßig auf die Phase des Sammelns und Vergleichens* zu beziehen. Auch wenn Lernende in der Sekundarstufe im Bereich des kooperativen Erkundens schon mehr leisten können, lohnt es sich, die Ansätze der Grundschule in diesem Bereich stärker auch in der Sekundarstufe fruchtbar zu machen.

Beispiele von kommunikationsintensive Methoden für unterschiedliche Lernsituationen

Lernsituationen des Erkundens:

- Gruppenpuzzle: Erarbeitungsphase
- Gruppenarbeit mit festen Rollen
- Gruppenexploration
- (Diskursive Gespräche, ...)

Lernsituationen des Sammelns und Vergleichens:

- Ich-Du-Wir
- Gruppenpuzzle: Erklärphase
- Strategiekonferenz
- Platzdeckchen
- diskursive Klassengespräche
- (gemeinschaftliches Sortieren von Kartenabfragen, ...)

Lernsituationen zum gezielten Aufbau von Sprachkompetenz:

- Geben und Nehmen
- Konstruktionsdiktat
- diskursive Klassengespräche
- (Stille Post, ...)

Lernsituationen des Anwendens mathematischer Begriffe und Verfahren:

- Leserbriefe oder Gutachten schreiben
- (Streitgespräche, Kugellager, ...)

Kasten 3

Kommunizieren beim Sammeln und Vergleichen

Vor diesem Hintergrund ist es vielleicht mehr als Zufall, dass sich auch in den Lehrplänen viele der Kompetenzerwartungen auf die *Lernsituation des Sammelns und Vergleichens* beziehen:

Schülerinnen und Schüler


- sprechen über eigene und vorgegebene Lösungswege, Ergebnisse und Darstellungen, finden, erklären und korrigieren Fehler,
- verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Richtigkeit und gehen darauf ein, äußern Kritik konstruktiv und gehen auf Fragen und Kritik sachlich und angemessen ein,
- vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen.
-

Gerade in der Rückschau auf bereits (in Gruppen, Paaren oder einzeln) bearbeitete Probleme ist Kommunizieren eine zentrale Tätigkeit. Dies erfordert insofern ein Umdenken, als diese Unterrichtsphase des Sammelns und Vergleichens im traditionellen Unterrichtsskript meist im gemeinsamen Klassengespräch unter starker Lenkung durch Lehrkraft an der Tafel geschieht. Wenn jedoch möglichst viele Lernende gleichzeitig zum Kommunizieren aktiviert werden sollen, dann kann auch diese Phase in Kleingruppen organisiert werden (z.B. mit den Methoden aus *Kasten 3*).

Aufgaben

Auch für das Sammeln und Vergleichen ist die Aufgabenqualität entscheidend, besonders relevant ist die in *Kasten 2* formulierte dritte Anforderung: Vor allem wenn unterschiedliche Lösungswege entstehen können., lohnt sich der Austausch mit anderen, wie in der Aufgabe Hexenskat in *Kasten 4* von Vernay (2005).

Hexenskat
Dies ist ein Spielstein aus dem Anlegespiel „Hexenskat“ von Reinhold Wittig.
Konstruiere die Form des Spielsteins auf ein weißes Blatt Papier.
Wie viele Möglichkeiten findest Du?



Kasten 4: Beispiel-Aufgabe mit vielfältigen Lösungswegen

Darüber hinaus können Aufgaben zur Kommunikation über Lösungswegen besonders anregen, wenn sie gezielte Aufträge zur Verbalisierung des Vorgehens enthalten (vgl. *Kasten 5*).

Zur Kommunikation anregende Aufträge:

- Erkläre Deine Überlegungen mit Skizzen.
- Schreibe auf, wie Du zu Deinem Ergebnis gekommen bist.
- Begründe Deine Lösungen und schreibe diese auf.
- Kontrolliere die Angaben. Schreibe auf, welche Fehler passiert sind.
- Zwei Lösungswege zweier Schüler vorgeben... Erkläre wie beide vorgegangen sind und warum sie zum selben Ergebnis gekommen sind.

(Aus den österreichischen Bildungsstandards 4)

Kasten 5

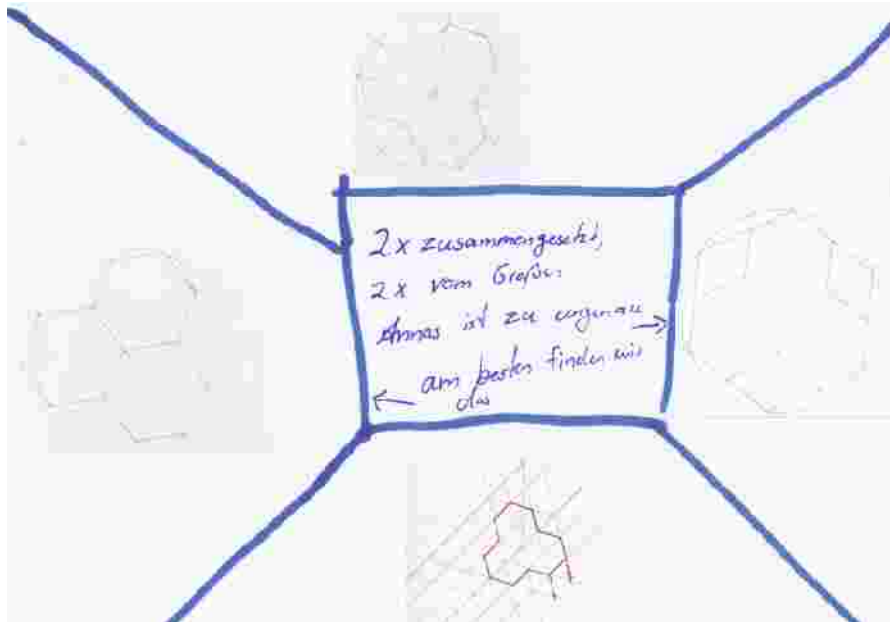
Methoden

Zur Anregung von Kommunikation in der Lernsituation des Sammeln und Vergleichen in der Grundschule haben sich die sogenannten Rechenkonferenzen etabliert (z. B. Sundermann 1999), wir bezeichnen sie für die Sekundarstufe als Strategiekonferenzen (Hußmann/Prediger 2007, Götze und Scherres in diesem Heft). Die Grundidee der Strategiekonferenz folgt dem ICH-DU-WIR-Prinzip (vgl. Hußmann/Gallin 2006): Mit herausfordernden Problemen beschäftigt sich jede Person (ICH) zunächst allein und tritt dann in einen Dialog mit anderen (DU), um nachzuvollziehen, welche Strategien andere für das gleiche Problem entwickelt haben. In der WIR-Phase werden schließlich gemeinsame Konventionen etc. vereinbart. Die Strategiekonferenz ist eine geeignete Methode für die DU-Phase, der in diesem Heft zwei Beiträge gewidmet sind (Götze und Scherres in diesem Heft).

Während die Strategiekonferenz eher auf den mündlichen Austausch setzt, ist das „Platzdeckchen“ eine stärker schriftlich gestützte Möglichkeit, den Austausch über mögliche Lösungswege zu initiieren.

Bei der Platzdeckchen-Methode erhalten die Kleingruppen DIN A3-Zettel und teilen sie in geeignete Felder. Jedes Gruppenmitglied trägt zunächst allein seine Ideen in die äußeren Kä-

chen, danach wird das Platzdeckchen schrittweise gedreht, so dass alle Gruppenmitglieder alle Beiträge lesen können (vgl. *Kasten 6*). Für die Mitte sollen sich die Lernenden dann auf die beste Lösung verständigen, was insbesondere eine Diskussion über die Frage erzeugt, was eine gute Konstruktion eigentlich ausmacht .



Kasten 6: Platzdeckchen zur Konstruktion des „Hexenskats“

Erweiterung des Aufgabenrepertoires auf Vorstellungen und Darstellungen

Wenn der Austausch über Ideen und Vorgehensweisen in einer Klasse etabliert ist, können die Aufgaben ausgeweitet werden: Wurden zunächst Standardtätigkeiten eigenständig erarbeitet, können nun Aufgaben ergänzt werden, die sich auf tiefer liegende Vorstellungen, Darstellungen und Argumentationen beziehen (vgl. Beispiel in *Kasten 7* von Sjuts 2006, S. 97f).

Jungen im Schulbus

Ansgar, Bertram, Carsten, Dieter und Erik fahren jeden Morgen mit dem Schulbus zur Schule. Da sie an der ersten Haltestelle einsteigen, schaffen sie es immer, sich auf die fünf Plätze der letzten Reihe zu setzen.

...

c) Ansgar erklärt: „Mich interessiert, wie viele Möglichkeiten wir fünf insgesamt haben, wenn ich stets neben Bertram sitze. Das ist doch so, als wären Bertram und ich eine Person auf einem Sitz, ihr drei hätten dann noch drei Plätze. Also sind es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.“

Ansgars Ergebnis ist nicht richtig. Greife aber seine Idee auf und führe sie richtig fort.

d) Bertram hingegen meint zu Ansgars Problem: „Ich überlege mir alle Möglichkeiten, die wir beide haben, uns nebeneinander zu setzen. So komme ich auf $1+2+2+2+1 = 8$ Möglichkeiten.“

Auch Bertrams Überlegung ist noch nicht vollständig. Setze sie zum richtigen Ergebnis fort.

Kasten 7

Kommunizieren zum Aufbau von Sprachkompetenz

In den bisher beschriebenen Lernsituationen wurde Sprache benutzt als Vehikel zum Austausch über Ideen, Ansätze und Lösungswege. Das Ziel der *Entwicklung von Kommunikationsfähigkeit* als zentrale Kompetenz muss darüber hinaus zuweilen auch die gezielte Weiterentwicklung der fachsprachlichen Fähigkeiten selbst ins Zentrum gestellt werden, insbesondere für die Kompetenz „die Fachsprache adressatengerecht verwenden“ (KMK-Bildungsstandards, siehe *Kasten 1*).

Enge Verknüpfung von Aufgabe und Methode

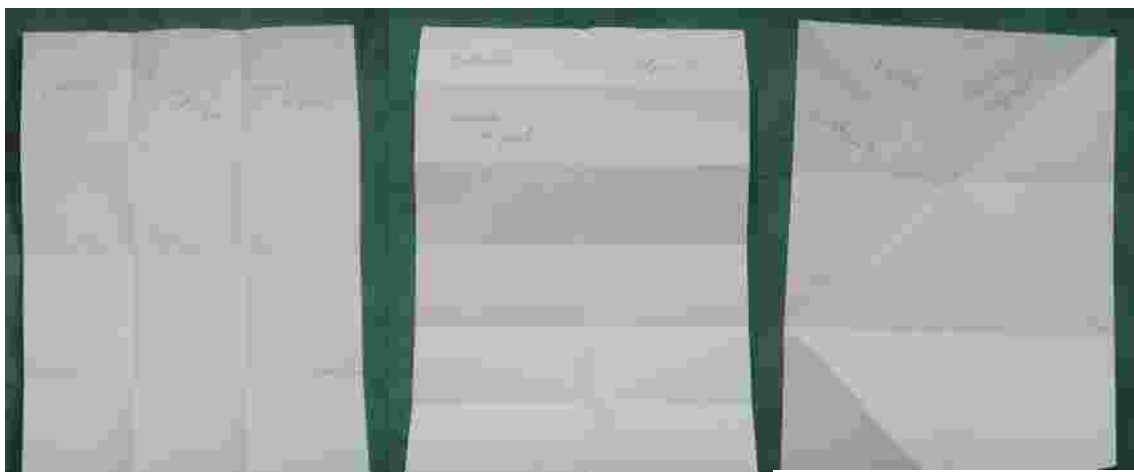
Wenn das Kommunizieren dem Aufbau (fach-)sprachlicher Kompetenz dienen soll, sind zwei Aspekte entscheidend: *Erstens* muss ein *authentischer Kommunikationsanlass* geschaffen werden, in dem präzises und effektives Kommunizieren tatsächlich wichtig ist (dies geht nicht, wenn z.B. das Gegenüber den Kommunikationsinhalt bereits besser als der Sprecher). *Zweitens* kann der Lerneffekt durch eine *Reflexion* über die Erlebnisse zur nachhaltigeren Erfahrung werden. In der Konstruktion von Aufgaben für einen solchen Kommunikationsanlass ist neben den Anforderungen aus *Kasten 2* daher ein expliziter Reflexionsauftrag am Ende des Austauschs entscheidend.

Maier/Schweiger (1999) haben die *Konstruktionsdiktate* als Beispiel für einen Ansatz angeführt, wie sich geometrische Konstruktionsbeschreibungen an ihrer Verständlichkeit und Eindeutigkeit authentisch messen lassen können: Wenn Lernende Konstruktionsbeschreibungen erstellen, können sie diese durch Diktat an anderen erproben. Diesen Ansatz haben Prediger/Vernay (2005) in einem Gruppenpuzzle für die Konstruktion von Kreisbildern furchtbar gemacht, um zu einer größeren Sensibilität über sprachliche Qualitäten zu kommen.

Beispiel einer Methode für Wortschatzarbeit

Für das Ziel der Konsolidierung eines fachsprachlichen Wortschatzes samt Bedeutungen eignet sich u.a. die Methode „Geben und Nehmen“ (ähnlich „Mathe-Panini“ in Barzel/Büchter/Leuders 2007, S. 136). In Parallelität zu den Panini-Sammelbildern werden hier Begriffe gesammelt und getauscht: Jeder Lernende faltet ein Blatt in 12 gleich große Teile (vgl. *Kasten 8*) und überlegt sich zu einem vorgegebenen Themengebiet (z. B. Lineare Funktionen) drei wichtige Begriffe, die auf den Feldern eingetragen werden. Beim freien Bewegen durch die Klasse werden nun Tauschpartner gesucht, und die eigene Sammlung wird durch jeweils eins-zwei Begriffe anderer ergänzt. Vor dem Tausch werden neue Begriffe jeweils in ihrer Bedeutung erläutert, und zwar so gut, dass der Empfänger sie in der nächste Runde selbst beim Weitergeben erläutern kann.

Das Spiel dient dem Festigen gelernter Fachbegriffe und trainiert das freie Sprechen vieler Lernender gleichzeitig ebenso wie das aktive Zuhören.



Kasten 8: Fachbegriffe sammeln beim Geben und Nehmen

Kommunizieren beim Anwenden mathematischer Konzepte

Wenn Begriffe und Verfahren bereits erworben sind, ist das Kommunizieren nicht der Weg zur Mathematik, sondern umgekehrt bietet die Mathematik Kommunikationsmittel für eine strukturell klärende, effiziente Kommunikation (Fischer 1986) über inner- und außermathematische Zusammenhänge. Diese wesentliche Charakteristikum der Mathematik sollte in Lernsituationen erfahrbar werden, in denen mathematische Konzepte zur Kommunikation angewandt werden.

Dazu sind Aufgaben nötig, die einen herausfordernden Anlass bieten, mathematische Konzepte zu aktivieren, weil sie etwa durch Verfälschung Zusammenhänge zum Widerspruch anregen. So nutzen Lernende etwa das Verhältnis-Konzept, um in einem Brief an die Mousse-Firma zu erläutern, wieso Mousse (entgegen der Werbung) doch eher dick macht als Joghurt (vgl. Denktzettel „Mousse und Joghurt“ in PM Heft 5). Beim Schreiben eines Briefes an die Firma wird die Notwendigkeit zum Argumentieren zum zentralen Kommunikationsanlass, der die Anwendung mathematischer Konzepte ganz im Sinne des definierten Bildungszieles der Kommunikationsfähigkeit befördert. „Aber wir müssen es echt gut aufschreiben, damit die das auch einsehen.“

Auch hier hängen Aufgaben und Methoden also eng zusammen: Der Widerspruch erzeugende Ausschnitt von Welt (als Zeitung, Werbung o. ä.) wird durch den Auftrag einen Leserbrief zu schreiben, zum authentischen Kommunikationsanlass. Der Auftrag, zu einem anderen Ausschnitt ein Gutachten zu erstellen, trainiert das argumentative Abwägen verschiedener Positionen (vgl. Barzel/Büchter/Leuders 2007).

Nur noch Kleingruppenarbeit? Nein!

Insgesamt zeigen die Beispiele aus den unterschiedlichen Lernsituationen, dass kommunikationsanregender Unterricht neben geeigneten Aufgaben auch passende methodische Arrangements braucht, um das Klassengespräch zeitweise zurück zu drängen zugunsten von Kommunikationssituationen, in denen möglichst viele Lernende zeitig kommunizieren und die Lehrkraft eher zuhören kann. Umgekehrt ist aber auch ein methodisch kommunikativ angelegter Unterricht ohne substantielle Aufgaben leer, beides gehört für angemessene Kommunikationsanlässe zusammen.

Gleichwohl bedeutet die Betonung der Kleingruppenaktivitäten nicht, dass Klassengespräche nicht mehr stattfinden dürfen, im Gegenteil: Cohors-Fresenborg und Kaune (2003) liefern überzeugende Beispiele dafür, dass gerade am Gymnasium ein wirklich diskursives Klassengespräch eine wichtige Schule kommunikativer Kompetenzen darstellen kann. Dies kann u.a. durch eine Orientierung an den in *Kasten 9* abgedruckten Regeln zur Herstellung von Diskursivität im Klassenzimmer entstehen. Nötig sind dazu substantielle Gesprächsgegenstände, zum Beispiel

- zur Aufdeckung von Diskrepanzen zwischen Gesagtem und Gemeintem,
- zur Behebung einer Fehlvorstellung,
- zur verallgemeinernden Darstellung eines Sachverhalts,
- Überprüfung eines Planungsschrittes oder einer Strategie,
- und eine Moderation, die das Gespräch immer wieder an die Lernenden gibt und dabei gleichzeitig konsequent auf die Einhaltung der Regeln der Diskursivität drängt,.

Regeln für ein diskursives Klassengespräch

- keiner (auch nicht die Lehrkraft) stellt Suggestivfragen
- jeder bemüht sich darum, die eigenen Gedanken so genau wie möglich zu formulieren
- jeder bezieht sich so gut wie möglich auf die Beiträge der anderen, d. h. insbesondere
- Äußerungen, die sich nicht erkennbar auf das Geschehen oder Gesagte beziehen, werden vermieden
- bereits Gesagtes wird nur wiederholt, um weiter darauf aufzubauen oder die eigene Position davon abzugrenzen

Nicht nur prozess - sondern auch inhaltsbezogene Kompetenzen - Verbalisieren als ein Schlüssel zum Verständnis

„Kommunizieren, schon wieder so ein Zusatzauftrag an den Mathematikunterricht, der früher anderen Fächern vorbehalten war, während wir uns auf die mathematischen Inhalte konzentrieren konnten.“ So sagte uns eine Kollegin, wir sehen es anders!

Mit der Trennung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen in den Lehrplänen kann leicht das Missverständnis aufkommen, es handle sich bei der Forderung nach kommunikativer Kompetenz um *zusätzliche* Anforderungen an Lehrende und Lernende, die mit der „eigentlichen Mathematik“ um Zeit und Aufmerksamkeit konkurrieren. Diesem Missverständnis wollen wir hier durch die explizite Betonung entgegen, dass viele formulierte Tätigkeiten im Bereich Kommunizieren zur Mathematik im Kern gehören, denn gerade das Verbalisieren bietet einen zentralen Schlüssel für das Verständnis mathematischer Inhalte. Gerade die folgenden Anforderungen stellen somit keine *Zusatzanforderungen* da, sondern bestärken und kanalisieren das zentrale Ziel eines verständnisorientierten Mathematiklernens, wie die obigen Beispiele zeigen.
Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln und Verfahren mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen,
- erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen, und
- erläutern mathematische Zusammenhänge und Einsichten mit eigenen Worten und präzisieren sie mit geeigneten Fachbegriffen.

Zusammenfassung

Wenn wir nun abschließend die Anforderungen an einen kommunikationsintensiven Mathematikunterricht in *Kasten 10* zusammenfassen, so zeigt sich noch einmal das Zusammenspiel von Aufgaben, Methoden und Moderation: Während die Quantität vor allem eine Frage der Methoden ist, ist Qualität vor allem über die Aufgabenqualität herzustellen. Authentizität erhalten die Kommunikationsanlässe nur bei stimmiger Kombination von Methode und Aufgabe, Eigenständigkeit wird nur bei Stimmigkeit aller drei Komponenten untereinander und zu den Vorerfahrungen der Lernenden erreichbar, dazu bedarf es insbesondere auch geeigneter Moderation. Das Gebot der Variation über die Lernsituationen hat Auswirkungen für alle drei Komponenten.

- Anforderungen an einen kommunikationsintensiven Mathematikunterricht
- Quantität: zeitweise möglichst starke Aktivierung möglichst vieler Lernender gleichzeitig
- Eigenständigkeit: Lernende sollten möglichst auch untereinander in Kommunikation treten
- Qualität: über mathematisch substantielle und reichhaltige Inhalte sprechen mit kognitiv anspruchsvollen Aktivitäten
- Authentizität der Kommunikationsanlässe
- Variation über die Lernsituationen

Kasten 10

Literatur

- Barzel, Bärbel / Büchter, Andreas / Leuders, Timo (2007): Mathematik - Methodik. Cornelsen Scriptor, Berlin.
- Begehr, Astrid (2004): Teilnahme und Teilhabe am Mathematikunterricht - Eine Analyse von Schülerpartizipation. Dissertation, FU Berlin. Online: <http://www.diss.fu-berlin.de/2005/208/>
- Blum, Werner / Drüke-Noe, Christina / Hartung, Ralph / Köller, Olaf (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Cornelsen, Berlin.
- Cohors-Fresenborg, Elmar / Kaune, Christa (2003): Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten“ gymnasialen Mathematikunterricht. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, S. 173-180.
- Fischer, Roland (1986): Zum Verhältnis von Mathematik und Kommunikation. In: Mathematica Didactica 9 (3/4), S. 119-131.

- Fischer, Roland (2001): Höhere Allgemeinbildung. In: Fischer-Buck, Anne u. a. (Hrsg.): Situation–Ursprung der Bildung. Universitätsverlag, Leipzig, S. 151-161.
- Gaudig, Hugo (1917): Die Schule im Dienste der werdenden Persönlichkeit. Erster Band. Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig.
- Götze, Daniela (2007): Mathematische Gespräche unter Kindern. Franzbecker, Hildesheim.
- Hußmann, Stephan / Gallin, Peter (2006) (Hrsg.): Schreiben – Lesen – Rückmelden: Dialogischer Unterricht. In: PM 48(7).
- Hußmann, Stephan / Prediger, Susanne (2007): Mit Unterschieden rechnen. In: PM 49(17), S. 1-8.
- Klieme, Eckhard / Baumert, Jürgen (2001) (Hrsg.): TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Bundesministerium für Bildung und Forschung, Bonn.
- Maier, Hermann / Schweiger, Fritz (1999): Mathematik und Sprache. oebv und hpt, Wien.
- Peschek, Werner / Prediger, Susanne / Schneider, Edith (2008): Reflektieren Reflexionswissen im Mathematikunterricht. In: PM 50(20), S. 1-6.
- Prediger, Susanne / Vernay, Rüdiger (2005): Kreisbilder erklären im Gruppenpuzzle. In: PM 47 (6), S. 17-22.
- Richter, Kathrin (2005): Wendestellen in Unterrichtsmethodik und Analysis – Ein Gruppenpuzzle zu Wendestellen als Beitrag zum selbständigen Lernen. In: PM 47(1), S. 20-28.
- Sjuts, Johann (2006): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgane in diagnostischer Hinsicht, in: Blum / Drüke-Noe /Hartung /Köller (Hrsg.), S. 96-112.
- Sundermann, Beate (1999): Rechentagebücher und Rechenkonferenzen. In: Grundschule, 31 (1), 48-50
- Vernay, Rüdiger (2005): Hexenskat. Aufgabensammlung Bilder mit Mathe, gesammelt u.a. im Rahmen des Come-nius-Projekts DiQME, Gesamtschule Mitte Bremen / Universität Dortmund.
- Voigt, Jörg (1984): Der kurztaktige, fragend-entwickelnde Mathematikunterricht. In: Mathematica Didactica 7(3/4) S. 161-186.
- Watzlawick, Paul / Beavin, Janet H. / Jackson, Don D.(1969): Menschliche Kommunikation. Huber, Bern.

Intermethinweise und Lehrpläne (letzter Zugriff 12.8.08)

- Auf der Internetseite vom Thüringer Landesinstitut stehen gute Hinweise zu kommunikationsanregenden Methoden:
<http://www.lernkompetenz.th.schule.de/>
- Österreichische Bildungsstandards 4: <http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/bildungsstandards.xml>
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 4.12.2003, Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder, http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf.
- Kerncurriculum Mathematik, Niedersachsen, Gymnasium, 2006,
http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf
- Kernlehrplan Nordrheinwestfalen, Gymnasium, NRW,
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/kernle_aene-sek-i/gymnasium-g8/mathematik-g8/