Muster in Päckchen

Mit strukturierten Übungen Fertigkeiten trainieren und Strukturen erkennen

Susanne Prediger

Etwas gekürzt und geändert erschienen in der Zeitschrift Mathematik 5-10, (2008) 3, S. 40-43.

Die Grundidee: Rechnen und Muster erkennen

„Schöne Übungsformen sind toll, aber ab und zu müssen wir auch ganz schnöde Fertigkeiten trainieren, und dann nehmen wir eben doch die Päckchen. Oder geht es auch anders?"

Es geht anders, und zwar sogar auch mit Päckchen! Aus der Grundschule können wir lernen, wie Päckchenrechnen und intelligentes Mathematiktreiben mit einer zentralen didaktischen Idee verbunden werden können (vgl. Wittmann/Müller 1994): Bestehen Päckchen nicht aus beliebig kombinierten, sondern strukturiert zusammenhängenden Aufgaben, so können Lernende nicht nur eine Rechenfertigkeit trainieren, sondern gleichzeitig mathematisch reichhaltiger tätig werden, indem sie Muster erkennen, beschreiben, und vielleicht sogar begründen. „Muster" ist dabei im Sinne der Regelmäßigkeiten und Strukturen gemeint, die Wirtmann/Müller (2008) als fachliches Grundkonzept beschreiben.

Beispiel Addieren von Dezimalzahlen (6.Klasse)

10,2 + 7,6 = 17,8
9,3 + 7,5 = 16,8
8,4 + 7,4 = 15,8
7,5 + 7,3 = 14,8
___ + ___ =
___ + ___ =

Was fällt Dir auf? Wie geht das Päckchen weiter? Warum?

Beispiel Einmaleins (5. Klasse)

$3 \cdot 1 + 1 = 4$

$4 \cdot 2 + 1 = 9$

$5 \cdot 3 + 1 = 16$

$6 \cdot 4 + 1 = 25$

$7 \cdot 5 + 1 = 36$

Wie heißt die nächste Aufgabe?
Wie heißt das Ergebnis der 17. Aufgabe?

Beim ersten Auftauchen löst die Frage nach der nächsten Aufgabe Irritationen aus, seit wann sollen wir Aufgaben selbst stellen? Doch ist sie verstanden, hilft die Aufforderung zur Fortsetzung des Päckchens gerade schwächeren Lernenden, das Muster zunächst nonverbal zu reproduzieren, bevor von ihnen erwartet wird, es in Worte zu fassen – eine bewährte Reihenfolge.

Sara beschreibt das von ihr rekonstruierte Bauprinzip des ersten Päckchen so: „Die erste Einerzahl wird immer eins weniger, die Zahl nach dem Komma eins mehr, und bei der zweiten Zahl wird die Zahl hinterm Komma eins mehr. Im Ergebnis wird die Einerzahl eins mehr.“ Sie hat damit eine Gesetzmäßigkeit der Veränderung erkannt und formuliert. Timo kann sogar, wenn auch noch nicht so glatt formuliert, einen Grund abgeben: „Erst wird es immer 0,9 weniger, dann 0,1 weniger, das macht zusammen immer eins weniger.“

Mit Hilfe des Musters kontrollieren

Die innere Struktur eines Päckchens muss nicht zwangsläufig die gesamte Aufgabe betreffen. In strukturierten Päckchen kann auch nur eine gesetzmäßige Beziehung zwischen den Ergebnissen der Aufgaben vorliegen.

Beispiel Rechenkontrolle (5. Klasse)

769 + 6 817 + 52 414 = 60 000
7 341 + 831 + 61 828 = 70 000
62 352 + 16 755 + 893 = 80 000
71 766 + 955 + 17 279 = 90 000
72 290 + 1 017 + 26 693 = 100 000

Hier gilt es beispielsweise zu erkennen, dass die Ergebnisse immer um 10 000 größer werden. Wer diese Struktur erkannt hat, kann seine errechneten Ergebnisse selbstständig kontrollieren.

Bei der Übungsform „Hüpf im Päckchen“ ist ebenfalls eine zu berechnende Aufgabenfolge vorgegeben.

Beispiel Hüpf im Päckchen (3. Klasse)

2 300 + 5 200 = 7 500
2 700 + 500 = 3 200
1 500 + 8 500 = 10 000
3 200 1 700 = 1 500
7 500 4 800 = 2 700
Ziel: 10 000

Auf den ersten Blick scheinen es beliebige Aufgaben zu sein. Schauen die Schülerinnen und Schüler etwas genauer hin, wird deutlich: Jedes Zwischenergebnis ist Ausgangspunkt einer neuen Rechnung.

Das Ziel gibt die Zahl an, die bisher noch nicht als Ausgangszahl verwendet wurde. Mit Hilfe dieser Struktur können die Lernenden ihre Aufgaben kontrollieren und gegebenenfalls verbessern: *„Hey Anna, unsere dritte Aufgabe muss falsch sein, sonst passen die Ergebnisse doch gar nicht mehr zusammen!“*

Mehr als nur Rechnen üben: Beispiel Zahlbereichserweiterung

Wer Vertrauen gefasst hat in die Fortsetzbarkeit solcher Päckchen, kann sich damit auch unvertrauteren Zahlbereichen nähern:

Beispiel Rechnen mit negativen Zahlen (Klasse 7)

$19 - 3 = 16$	$3 \cdot (-5) = -15$
$16 - 2 = 14$	$2 \cdot (-5) = -10$
$13 - 1 = 12$	$1 \cdot (-5) = -5$
$10 - 0 = 10$	$0 \cdot (-5) = 0$
$7 - (-1) = 8$	$(-1) \cdot (-5) = 5$
$4 - (-2) = 6$	$(-2) \cdot (-5) = 10$

Setze die Päckchen mindestens 3 Aufgaben weiter fort.

Anbahnung algebraischen Denkens

$3 \cdot 1 + 1 = 4$
$4 \cdot 2 + 1 = 9$
$5 \cdot 3 + 1 = 16$
$6 \cdot 4 + 1 = 25$
$7 \cdot 5 + 1 = 36$

vertikale Zusammenhänge

horizontale Zusammenhänge

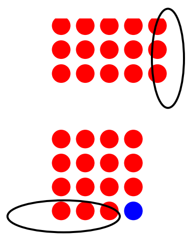
Wie heißt die nächste Aufgabe?
Wie heißt das Ergebnis der Aufgabe, wenn die Startzahl 17 ist?

Einfach strukturierte Päckchen der vorgestellten Form sind eine sehr gute Schule funktionalen Denkens im Sinne von Felix Klein: Wie verändern sich die Zahlen miteinander? Hier werden vertikale Zusammenhänge zwischen den Aufgaben eines Päckchens betrachtet. Zum zweiten Beispiel sagte Max: „Die vorderen Zahlen werden immer um eins mehr, die hinteren um 5,7,9,11, und immer so weiter.“

Neben diesem vertikalen Zusammenhang ist im zweiten Päckchen der horizontale Zusammenhang in dem wiederkehrenden Muster zwischen Produktterm und Ergebnis:

Rebecca: *„Die zwei malgenommen und eins dazu, dass ist wie zwei mal die mittlere Zahl“.*

Karla schiebt die Plättchen so: *„Das ist wie das Quadrat, und in das Loch setz ich noch einen rein.“*



Wer die algebraische Sprache zur Verfügung hat, könnte nun schreiben $(x+1)(x-1) + 1 = x^2$. Fünftklässler dagegen erarbeiten sich eine Ausruckweise ohne Variable, wenn man sie nach der 17.Aufgabe fragt:

Paul: *„17, davon eins mehr, mal eins weniger und dann noch eins dazu, das ist gleich 17 mal 17. Und genau geht das für jede andere Zahl!“*

So wird durch die Frage nach der 17. Zahl ein Denken in allgemeinen Zahlen angebahnt, Variablen sind da nicht mehr weit.

Die Frage nach der Lösung der 17. Aufgabe ohne Berechnung ist ein Prognoseauftrag, der klar macht, wieso man sich für die allgemeine Form interessiert.

Gesetzmäßigkeiten zwischen strukturierten Aufgaben zu erkennen, erfordert nicht immer einganzes Päckchen, manchmal reichen auch 2 Aufgaben, etwa zum „Wiederentdecken" des Kommutativgesetzes bei den Brüchen als Garant für den strukturellen Zusammenhang zwischen Aufgabe und Tauschaufgabe:

Beispiel Addition von Brüchen (Klasse 6)

3/5 + 2/15 =	4/5 + 3/20 =	2/7 + 4/14 =
2/15 + 3/5 =.	3/20 + 4/5 =	___ + ___ =

Was fällt Dir auf?

Strukturierte Rechenpäckchen selbst konstruieren

Während die Idee der strukturierten Päckchen nach dem Zahlenbuch auch in vielen anderen Grundschulbüchern Einzug erhalten hat, ist sie in der Sekundarstufe immer noch erstaunlich wenig etabliert, obwohl gerade in Klasse 5 bis 7 die darin angelegte Propädeutik der Algebra insbesondere für schwächere Lernende essentiell wäre. Hier kann man Vorerfahrungen machen, was Variable später leisten sollen.

Deswegen lohnt es sich, selbst strukturierte Rechenpäckchen zu konstruieren. Dazu wird zunächst eine typische Aufgabe für das Training einer Fertigkeit ausgewählt, z. B. zum Multiplizieren von Brüchen.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} =$

Nun muss das Muster festgelegt werden, mit dem die Aufgabe sich weiter entwickelt (hier: ein Zähler und ein Nenner verdoppeln sich jeweils), und das Gesetz, was dabei gefunden werden kann, (hier: das Gesetz der Konstanz des Produkts bei gegensinniger Veränderung der Faktoren):

$\frac{6}{4} \cdot \frac{2}{10} =$

$\frac{12}{4} \cdot \frac{2}{20} =$

$\frac{24}{4} \cdot \frac{2}{40} =$

$\frac{6}{4} \cdot \frac{2}{10} =$

Und schon ist ein Päckchen entstanden, in dem man nicht nur Rechnen, sondern auch Muster entdecken kann! Beim Rechnen mit negativen Zahlen lohnt es sich insbesondere das Augenmerk auf den Übergang der Null zu legen – was ändert sich hier?

Für Päckchen, in denen auch ein horizontaler Zusammenhang erkannt werden soll, ist es am einfachsten, von einer einfachen algebraischen Gleichung auszugehen, z. B.

(n-1) + n + (n+1) = 3n

und diese dann in ein Päckchen zu übersetzen:

n=2: 1+2+3 =

n=3: 2+3+4 =

n=4: 3+4+5 =

n=5 …

Das simple Beispiel aus Klasse 3 lässt sich auf schwierigere Fällen übertragen, etwa zum Üben der Termrechenregeln: (10 · (x +3) -20):5 - 2 = 2x

Strukturierte Päckchen herstellen

Päckchen mit vertikalen Zusammenhängen

1. Schritt

Eine typische Aufgabe für das Training einer Fertigkeit auswählen:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} =$$

2. Schritt

Nun muss das Muster festgelegt werden, mit dem die Aufgabe sich weiter entwickelt und der Zusammenhang, der dabei gefundenen werden kann.

Beispiel für ein Muster:
Ein Zähler und ein Nenner verdoppeln sich jeweils.

Beispiel für einen Zusammenhang:
Bei gegensinniger Veränderung der Faktoren ist das Produkt konstant.

3. Schritt

Das Päckchen nach diesem Muster herstellen.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} =$$
$$\frac{6}{4} \cdot \frac{2}{10} =$$
$$\frac{12}{4} \cdot \frac{2}{20} =$$
$$\frac{24}{4} \cdot \frac{2}{40} =$$

Päckchen mit horizontalen Zusammenhängen

1. Schritt

Für Päckchen, in denen innerhalb einer Aufgabe ein Zusammenhang erkannt werden soll, geht man von einer einfachen algebraischen Gleichung aus, zum Beispiel:

$$(10 \cdot (x+3)-20) : 5-2 = 2x$$

2. Schritt

Startzahl aussuchen und das Päckchen nach dem Muster aufbauen:

$x=1$: $(10 \cdot 4-20) : 5-2 = 2$

$x=2$: $(10 \cdot 5-20) : 5-2 = 4$

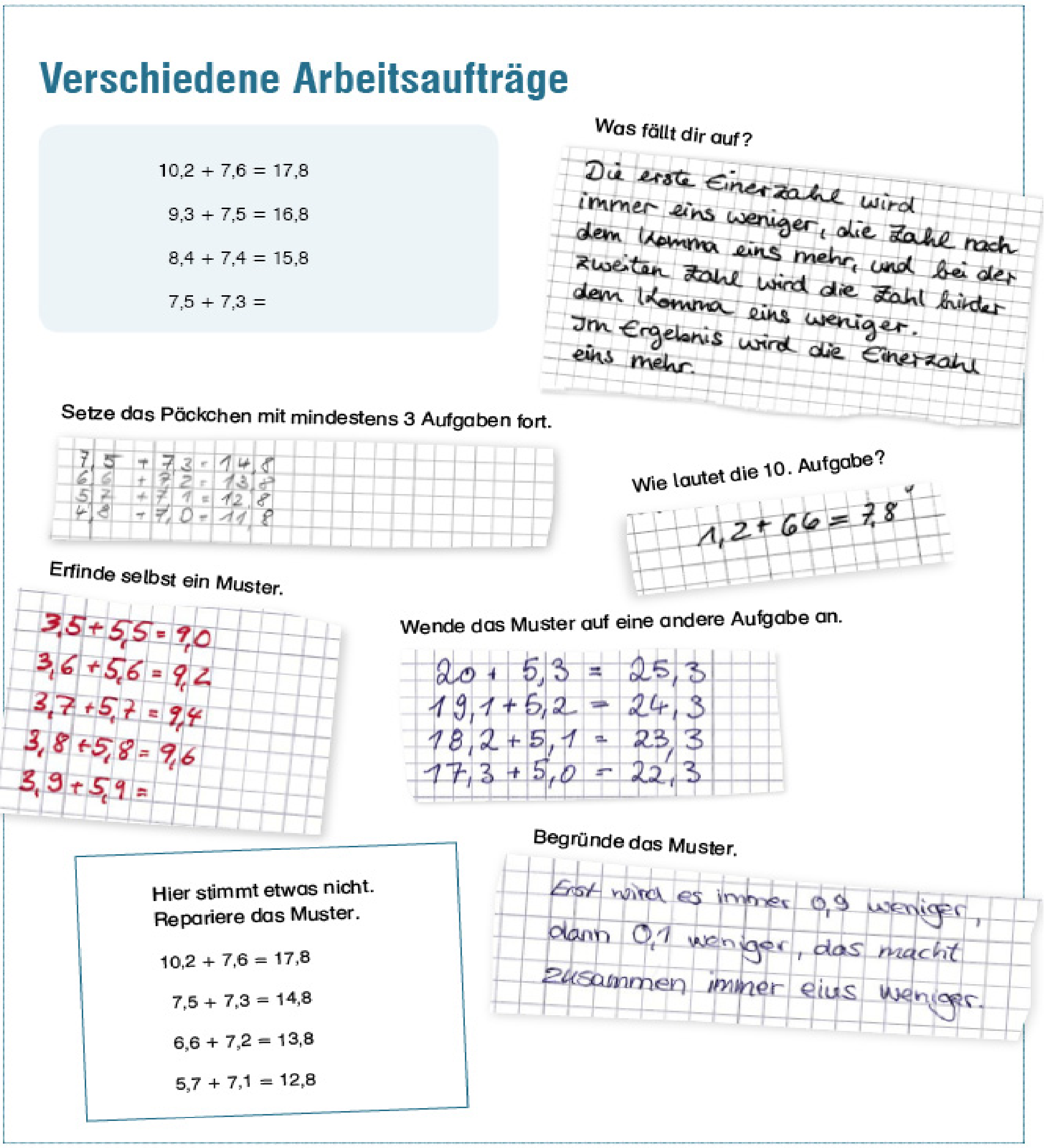
$x=3$: $(10 \cdot 6-20) : 5-2 = 6$

$x=4$: $(10 \cdot 7-20) : 5-2 = 8$

$x=5$: ...

Die explizite Frage nach dem Muster am Ende des Päckchens kann variieren:

- Muster fortsetzen
- Muster beschreiben
- Muster begründen
- n-tes Glied der Aufgabenkette angeben
- unterbrochenes Muster reparieren
- selbst Muster erfinden, drei verschiedene Fortsetzungen einer Aufgabe suchen lassen
- analoge Muster auf andere Aufgabe loslassen
- …



Nicht nur beim Rechnen

Natürlich ist die Idee der strukturierten Päckchen auch auf andere Themengebiete übertragbar, z. B. Zeichnen von Graphen linearer Funktionen (dabei kann man die Bedeutung der Parameter entdecken) oder Prozentrechnung.

Beispiel: Graphen linearer Funktionen (8. Klasse)

Zeichne die Graphen der folgende linearen Funktionen:

y(x) = 3x + 4	y(x) = 2x + 3
y(x) = 2x + 4	y(x) = 2x + 2
y(x) = 1x + 4	y(x) = 2x + 1
y(x) = 0x + 4	y(x) = 2x + 0
y(x) = -1x + 4	y(x) = 2x - 1
y(x) = -2x + 4	y(x) = 2x - 2

Beispiel Prozentrechnung (7. -10. Klasse)

Bestimme

70% von 132€	70% von 132 €
80% von 132€	70% von 122 €
90% von 132€	70% von 112€
100% von 132€	
110% von 132€	
120% von 132€	

Wie in der Arithmetik können auch hier mit strukturierten Päckchen neben dem Training der Fertigkeiten Muster erkannt und eine Dynamisierung des Denkens angeregt werden. Wie viel kommt dazu, wenn es 10% mehr sind?

Natürlich gibt es produktives Fertigkeitentraining auch in der Geometrie, statt der strukturierten Päckchen lohnt es sich hier allerdings, die Aufgaben breiter zu variieren, vgl. Leuders/Wittmann (2006).

Strukturierte Päckchen im Unterricht

Natürlich sind die strukturierten Päckchen nur eine unter vielen Möglichkeiten für produktives Üben (vgl. Winter 1984, Leuders 2006). Das reizvolle an den strukturierten Päckchen ist, dass sie keine zusätzlichen Lerninhalte erzeugen, die in Extra-Stunden isolierten Sondercharakter haben, sondern mitten im regulären Lernen von „Schwarzbrotthemen", also Standard-Fertigkeiten genutzt werden können, und dennoch wichtige zusätzliche Aspekte des Mustererkennens und Dynamisierens ins Spiel bringen.

Unterrichtsmethodisch ist entscheidend, dass alle Lernenden die Päckchen selbst rechnen (es soll ja trainiert werden) und danach über die Muster auch gesprochen wird. Hier zeigen sich oft unterschiedliche Ideen der Lernenden und die Notwendigkeit, eine geeignete Sprache für die entdeckten Phänomene langsam und behutsam zu entwickeln.

Literatur

Leuders, Timo (2006): Reflektierendes Üben mit Plantagenaufgaben, in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), 59(5), S. 276–284.

Leuders, Timo / Wittmann, Gerald (2006): Fit in Form. Produktives Üben in der Geometrie, Themenheft Praxis der Mathematik in der Schule 48(12)

Winter, Heinrich (1984a): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, in: Mathematik lehren 2, S. 4-16.

Wittmann, Erich C. / Müller Gerhard N. (1994): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2 Klett, Stuttgart.

Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhd N. (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept, in: Walther, Gerd / van den Heuvel-Panhuizen, Marja / Granzer, Dietline / Köller, Olaf (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Cornelsen, Berlin, S. 42-65.