„Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule“

Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung

Nikola Leufer und Susanne Prediger

In: Andreas Büchter, Hans Humenberger, Stephan Hußmann, Susanne Prediger (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis, Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag, Franzbecker, Hildesheim 2007.

Zusammenfassung: Ausgehend von der These, dass eine Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung die Zusammenarbeit von Fachwissenschaft und Fachdidaktik erfordert, wird am Beispiel des Projekts „Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis“ ein pragmatischer Ansatz vorgestellt. Die Evaluation zeigt Notwendigkeit und Wirkungen der Intervention.

Anspruch und Wirklichkeit – ein viel beschriebenes Problem

> *Für den künftigen Lehrer und seine berufliche Tätigkeit ist es von ausschlaggebender Bedeutung, wie er in Mathematik ausgebildet wird, wie er seine mathematischen Erfahrungen im Studium sammelt und welches fachliche Niveau er erreicht. Daher ist eine solide und umfassende fachwissenschaftliche Ausbildung […] eine wesentliche Grundlage für seinen späteren Beruf (DMV 1979, S. 1)*

Über diesen vor fast 30 Jahren formulierten Anspruch einer soliden und umfassenden fachinhaltlichen Ausbildung für künftige Gymnasiallehrerinnen und -lehrer gibt es einen breiten Konsens, auch wenn sich die *Auslegungen* dieser Forderung durchaus unterscheiden und einer Wandlung unterliegen.

Einen ebenso großen Konsens gibt es international allerdings über die Tatsache, dass dieser Anspruch in der gängigen Praxis der universitären Ausbildung für das gymnasiale Lehramt nur zum Teil eingelöst wird. Als ein zentrales Problem wird immer wieder der fehlende Zusammenhang zwischen schulmathematischen Erfahrungen und der universitären Ausbildung im fachinhaltlichen und -didaktischen Bereich genannt sowie die folgenden, sich daraus ergebenden Probleme:

- Mangel an Sinnstiftung: Lehramtsstudierende sehen häufig keinen *Sinn* in einer intensiven Auseinandersetzung mit der universitären Mathematik (z. B . Danckwerts in diesem Band).
- Nur partiell überzeugende Lernergebnisse im fachinhaltlichen Bereich: Immer wieder enttäuschen Lehramtsstudierende in den Prüfungen. Untersuchungen zeigen, dass dieses Problem kausal mit mangelnder Sinnstiftung zusammenhängt, die eine Voraussetzung zur Leistungsbereitschaft bildet (z. B. Cooney/Wiegel 2003).
- Nur partiell berufsfeldangemessenes fachinhaltliches Kompetenzprofil: Selbst Studierende mit sehr guten Leistungen haben oft Schwierigkeiten, ihre fachwissenschaftlichen Kompetenzen für einen didaktisch sensiblen Umgang mit Schulmathematik fruchtbar zu machen, da das angestrebte Kompetenzprofil zu wenig auf die Anforderungen an Lehrkräfte bezogen ist (z. B. Hefendehl-Hebeker 2004).

Wer ist zuständig?

Zur Überwindung dieser Lücke zwischen Schul- und Hochschul-Mathematik hat Wolfgang Henn in verschiedenen Kontexten wiederholt darauf hingewiesen, wie wesentlich eine „Verbindung zwischen fachinhaltlichem Wissen, pädagogischem Kontextwissen und schulpraktischem Handlungswissen“ ist:

> *Tatsächlich steht dies oft isoliert nebeneinander, und man hofft, dass sich dies in den Köpfen der Studenten von selbst zusammenfügt – eine empirisch längst widerlegte Hoffnung. Die universitäre Lehrerausbildung benötigt eine Brückendisziplin, welche die verschiedenen Komponenten zusammenbringt. Das ist die Fachdidaktik. (Blum/Henn 2003, S. 75)*

In der Tat sind die geforderten Brückenschläge eine wesentliche Strategie zur Überwindung der „doppelten Diskontinuität“ zwischen Schul- und Hochschulmathematik (nach Felix Klein 1924, vgl. Danckwerts in diesem Band). Dass die Fachdidaktik als wissenschaftliche Disziplin für die Etablierung dieser Brückenschläge in gewisser Weise zuständig ist, steht außer Zweifel. Schließlich verfügen gerade Fachdidaktikerinnen und -didaktiker sowohl über den hochschulmathematischen Hintergrund als auch über das Wissen über schulische Herausforderungen. Gleichwohl sollten solche Brückenschläge als gemeinsame Aufgabe von Fachwissenschaft und Fachdidaktik betrachtet werden (vgl. Danckwerts/Prediger/Vasarhelyi 2004).

Streitbarer ist die Frage, wo in der Lehramtsausbildung der richtige Ort für die Brückenschläge ist. Während Blum/Henn (2003) die fachdidaktischen Veranstaltungen als geeigneten Ort vorschlagen, ist das von Danckwerts (in diesem Band) beschriebene Projekt geprägt von der bestechenden Idee, neben den fachinhaltlichen und den fachdidaktischen Veranstaltungen weitere Scharnier-Veranstaltungen zu etablieren. Diese entlasten die fachdidaktischen Veranstaltungen erheblich von schulmathematischen Aspekten, deren Bearbeitung viele Lehrende in der Fachdidaktik seit Jahren als „Reparaturbetrieb“ für eine nicht ideal gestaltete fachinhaltliche Ausbildung empfinden.

Nicht nur aus Mangel an zusätzlichen Kapazitäten (der Lehrenden ebenso wie der Studierenden) für zusätzliche Scharnierveranstaltungen sind wir jedoch der Meinung, dass Sinnstiftung für eine fachlich tiefgehende Ausbildung und Brückenschläge zwischen Hochschul- und Schulmathematik direkt in die fachinhaltlichen Veranstaltungen integriert werden sollten.

Dabei geht es insbesondere um folgende Aspekte und Lernziele:

- Mathematische Grunderfahrungen in der ganzen Breite (Winter 1996): Studierende müssen Mathematiklernen so erfahren, wie dies für die Schule verlangt wird (Borneleit u.a. 2001), nämlich als bedeutungsvollen, konstruktiven Prozess (Bender et al. 1999, Cooney/Wiegel 2003, Müller/Steinbring/Wittmann 2004).
- Entwicklung vorstellungs- und prozessorientierter mathematischer Kompetenzen (Danckwerts in diesem Band).
- Aufbau eines didaktisch sensiblen Fachverständnisses (vgl. Hefendehl-Hebeker 1998), indem die Studierenden
    - erfahren, wie mathematische Wissensbildung geschieht (beispielhaft in Büchter/Henn 2004),
    - Sinnzusammenhänge zwischen den Theorieelementen und Problemstellungen begreifen,
    - auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen argumentieren,
    - den Gebrauch von Fachsprache als hilfreiches Instrument zur Klärung von Zusammenhängen erfahren.
- Aktivierung entwickelter mathematischer Kompetenzen für didaktische Tätigkeiten, z. B. für die Analyse des mathematischen Gehalts von Schülerprodukten oder Schulbuchzugängen.

Dieses, in der Grund-, Haupt- und Realschulehramtsausbildung vielerorts bereits etablierte, Verständnis (vgl. etwa Müller/Steinbring/Wittmann 2004, Bender et al. 1999, Cooney/Wiegel 2003) ist in der Gymnasialausbildung insofern schwieriger einzulösen, als die fachinhaltlichen Lehrveranstaltungen gerade der ersten Semester (aus unterschiedlichen, teils guten Gründen) gemeinsam mit Diplom-Studierenden besucht werden.

Wie solche, *spezifisch* für Lehramtsstudierende konzipierte, Veranstaltungen diesen Ansprüchen gerecht werden können, zeigt z. B. Wolfgang Henn in seinen Lehrbüchern in überzeugender Weise (Büchter/Henn 2004, Henn 2003). Für die *gemeinsamen* Veranstaltungen müssen dagegen *pragmatische Ansätze der Binnendifferenzierung* erst gefunden werden, die den schulbezogenen Anforderungen gerecht werden können und gleichzeitig den Rahmenbedingungen der mathematischen Fachbereiche entsprechen.

Ein pragmatischer Ansatz im Projekt „Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis“

Einen binnendifferenzierenden Ansatz in Zusammenarbeit von Fachdidaktik und Fachwissenschaft konnten wir im Rahmen des kleinen Projekts „SiBidA - Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis – Ein Baustein zur Innovation in der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung“ (gefördert vom Senator für Bildung und Wissenschaft in Bremen) für die Erstsemester-Veranstaltungen zur Analysis I und II im Studienjahr 2005/06 an der Universität Bremen gemeinsam mit dem Veranstalter Michael Böhm aus der Technomathematik erproben.

Die Veranstaltung wurde durch spezielle Tutorien für die 62 Gymnasial-Lehramtsstudierenden begleitet, so dass zwar die Vorlesung von Diplom- und Lehramtsstudierenden gemeinsam besucht, aber Raum geschaffen wurde, um auf die spezifischen Bedürfnisse zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer einzugehen.

Etwa ein Fünftel der Übungsaufgaben wurde durch speziell konzipierte schulbezogene Aufgaben ersetzt und zum Teil einzeln, zum Teil in Gruppen bearbeitet. Mit diesen „Lehreraufgaben“ sollte inhaltlich die Brücke zwischen Schul- und Hochschulmathematik geschlagen werden, indem sie

- vorstellungsorientiertes Verständnis und Begriffsbildung betonten,
- zur Analyse des mathematischen Gehalts von Schulbuchausschnitten und Eigenproduktionen anregten und dies in Bezug zur Veranstaltung setzten,
- zum Begründen auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen aufforderten,
- u. v. m.

Die spezielle Veranstaltung eignete sich insofern gut für diesen Ansatz, als auch die Vorlesung von Michael Böhm didaktische Ansprüche verfolgte, die wir für die Lehramtsausbildung für zentral halten:

- Genetisch erlebbare Begriffs- und Theoriebildung, ausgehend von inner- und außermathematischen Problemstellungen statt Präsentation fertiger axiomatisch-deduktiver Theorie,
- Verzicht auf formale Strenge (an geeigneten Stellen), zugunsten der Anschaulichkeit und des Verständnisses der Grundideen,
- Arbeiten und Argumentieren auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen,
- Modellieren als zentrale mathematische Tätigkeit erlebbar machen,
- Betonung des kooperativen Arbeitens und des Kommunizierens über Mathematik in den methodisch umstrukturierten Übungen.

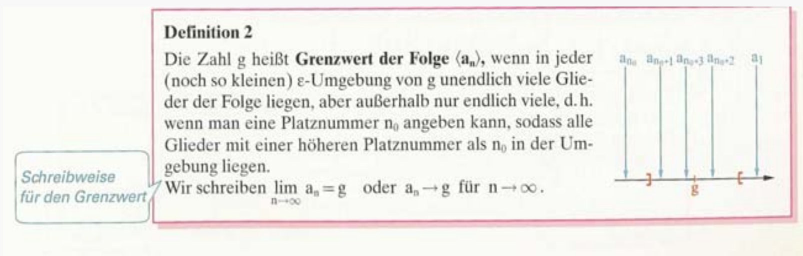
Insgesamt ist unsere lehramtsspezifische Intervention als ein pragmatischer Versuch einzustufen, der aufgrund begrenzter Ressourcen nicht durch größeren Betreuungsaufwand sondern durch *inhaltliche Verschiebungen* im bescheidenen Rahmen die Qualität der Lehre heben sollte. Die Intervention fokussierte als *ersten Schritt* zum Aufbau einer didaktisch sensiblen Fachkompetenz insbesondere auf *Sinnstiftung,* also darauf, dass die Studierenden ihre fachinhaltliche Ausbildung als bedeutungsvoll für die spätere Berufspraxis erfahren.

Konkrete Einblicke

Zur Konkretisierung sollen im Folgenden Aufgabenbeispiele als Prototypen der verwendeten „Lehreraufgaben“ zum Thema Folgen und Reihen vorgestellt werden.

1. Aufgabenbeispiel: Alternative Grenzwertdefinitionen untersuchen

Alternative Definition auf Äquivalenz untersuchen: Im Schulbuch Elemente der Mathematik (Griesel/Postel 1999, S. 235) finden wir die folgende Definition des Grenzwertes:



Definition 2

Die Zahl g heißt **Grenzwert der Folge** (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von g unendlich viele Glieder der Folge liegen, aber außerhalb nur endlich viele, d. h. wenn man eine Platznummer n_0 angeben kann, sodass alle Glieder mit einer höheren Platznummer als n_0 in der Umgebung liegen.

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.

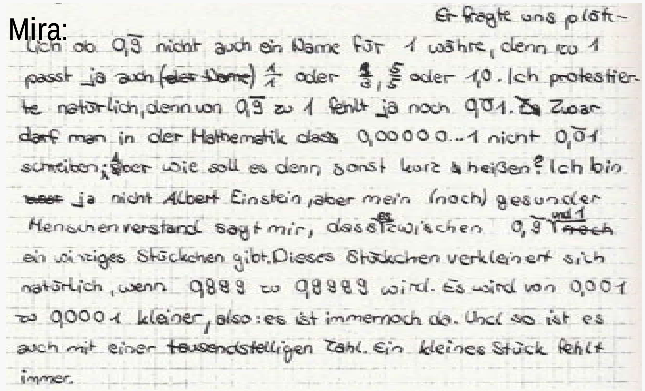
Formalisieren Sie die Aussage in die Epsilon-Sprache und vergleichen Sie sie mit der in der Veranstaltung benutzten. Wo liegen die Unterschiede? Ist sie äquivalent? Wenn ja, zeigen Sie die Äquivalenz, falls nein, widerlegen Sie sie.

2. Aufgabenbeispiel: Bezüge zwischen Reihen und Dezimalzahlen herstellen

In der Vorlesung wurde von Dezimalzahlen als wichtigste Reihen der Mittelstufe gesprochen.

a. Zusammenhange explizieren:
Was haben Dezimalzahlen und Reihen überhaupt miteinander zu tun? Erläutern Sie den Zusammenhang. Nutzen Sie dazu das Beispiel des Bruchs $\frac{1}{99}$. Konvergiert die zugehörige Reihe? Wieso (nicht)?

b. Begriffliche Werkzeuge nutzen:
Betrachten Sie Miras Überlegungen zu einem schwer begreiflichen Dezimalbruch: Ist 0,999999999… wirklich 1?



Mira:

Er fragte uns plötzlich ob $0,\overline{9}$ nicht auch ein Name für 1 währe, denn zu 1 passt ja auch ~~(der Name)~~ $\frac{1}{1}$ oder $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$ oder 1,0. Ich protestierte natürlich, denn von $0,\overline{9}$ zu 1 fehlt ja noch $0,\overline{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik dass 0,00000...1 nicht $0,\overline{0}1$ schreiben; aber wie soll es denn sonst kurz heißen? Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0,\overline{9}$ und 1 ~~noch~~ ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich, wenn 0,999 zu 0,9999 wird. Es wird von 0,001 zu 0,0001 kleiner, also: es ist immernoch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl. Ein kleines Stück fehlt immer.

Wie würden Sie auf ihre Ideen antworten? Wie lässt sich das Problem auflösen? Nutzen Sie die begrifflichen Werkzeuge aus der Vorlesung!

In der ersten Beispielaufgabe steht der Umgang mit der Fachsprache („Epsilon-Sprache“) als Mittel zur Klärung von Unterschieden zwischen Definitionen des Grenzwertbegriffs im Vordergrund. Ihre Schwäche erlebt man bei der Suche nach einem Beweis, der über die Analyse von Beispielen besser gefunden werden kann als auf der formalen Ebene der Quantoren.

Bereits in der Mittelstufe begegnen Lernende Phänomenen, die durch Reihen beschrieben werden können, z. B. unendlichen Dezimalzahlen und Kreisflächen-Näherungen. Der Zusammenhang dieser Phänomene mit der Grenzwertbildung ist jedoch vielen Studierenden nicht bewusst, wenn er nicht explizit in der Veranstaltung hergestellt wird. Dies versucht Aufgabenteil a. des zweiten Aufgabenbeispiels. Aufgabenteil b. greift auf eine oft zitierte Problemstellung zurück. Um Miras Irritation (aus Jahnke 2005) aufzulösen, erleben die Studierenden den Grenzwert als hilfreiches begriffliches Werkzeug. Die Aufgabe löste interessante Aha-Effekte und Fragen aus: „Wie, dann ist Null Komma Periode Neun gar keine richtige Zahl, sondern eine Reihe? Oder doch nur ihr Grenzwert?“, „Was *ist* denn nun die Dezimal*zahl*?“

Weitere Aufgabenbeispiele seien nur angedeutet:

- Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf drei Exaktheitsstufen: Welche Grundvorstellungen unterstützen ein vorstellungsorientiertes Argumentieren hier am besten?
- Lösen schulrelevanter Modellierungsaufgaben (wie in Henn 2000) – keineswegs ein Selbstläufer!
- Gegenüberstellung verschiedener Herleitungen von elementaren Funktionen (Wie wird die Sinus-Funktion in der Vorlesung eingeführt, wie im Unterricht? Wo taucht die schulische Charakterisierung dann in der universitären Theorie als Satz wieder auf?)
- Reflexion des Zusammenspiels von geometrischer Veranschaulichung und algebraischer Formulierung der komplexen Zahlen.

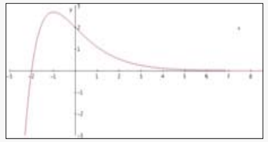
Wirkungen

Die Evaluation durch halbstandardisierte Fragebögen am Ende des Semesters zeigte einen deutlichen Unterschied zu den Evaluationen der vorjährigen Durchgänge der Analysis auf. Während fast alle Lehramtstudierenden früherer Jahrgänge das gemeinsame Studium mit den Diplomstudierenden als unbefriedigend empfunden und diese Unzufriedenheit in einer offenen Aufforderung zu Kommentaren explizit formuliert hatten, gab es in dem speziell betreuten Jahrgang keinen einzigen solchen Kommentar. Die Intervention scheint zu einer deutlichen Motivationssteigerung beigetragen zu haben, so dass die Studierenden die Ansprüche der Veranstaltung und ihrer Prüfung als sinnvoll empfanden.

Mit diesem Evaluationsinstrument allein konnten wir jedoch noch nicht ausschließen, dass sich die Studierenden nur zu einer globalen Einsicht in die Relevanz der Veranstaltung hatten „überreden“ lassen. Unser Verständnis von Sinnstiftung sollte deswegen über die Motivationsebene hinaus auch die Bereitschaft (und über Sinnstiftung hinaus somit auch die Fähigkeit) umfassen, das erworbene mathematische Wissen zur Lösung didaktischer Fragen zu nutzen. Daher wurde eine zweite Evaluation durchgeführt, die zeigen sollte, ob die Studierenden aus sich heraus in einer didaktischen Aufgabe in sinnvoller Weise Gebrauch von ihrem hochschulmathematischen Wissen machen würden, auch wenn dies nicht durch die Rahmung der Analysisveranstaltung nahe liegt.

Die Aufgabe wurde als Hausübung in einer Didaktikveranstaltung gestellt, so dass der zeitliche Abstand zwischen ihrer Bearbeitung und der Analysis-Veranstaltung etwa sechs Monate betrug und sie von den Studierenden nicht unmittelbar als „Evaluation“ identifiziert werden konnte. Sie wurde von 105 Studierenden unterschiedlicher Schulformen bearbeitet. Die Studierenden im Grund-, Haupt- und Realschullehramt dienten dabei als Vergleichsgruppe zur evaluierten Gruppe der Gymnasial-Studierenden.

3. Beispiel. Evaluationsaufgabe



Folgende Aufgabe wurde zum Beginn der 13. Klasse (Mathematik Grundkurs) eines Gymnasiums in Bremen als Hausaufgabe gestellt:

Aufgabe: Gegeben ist die reelle Funktion f durch $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

a.) Untersuchen Sie die Funktion f und ihr Schaubild K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichen Sie K für x-Werte im Bereich -3 bis 5.

b.) Welche Vermutung ergibt sich aus den ersten vier Ableitungen von f für eine Stammfunktion F von f? Weisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch nach.

Die Kurve K, die Gerade $x = -1$ und die x-Achse rechts von dieser Geraden schließen eine Fläche ein. Wie groß ist diese?

Pia, eine Schülerin des 13. Jahrgangs, löste den Aufgabenteil a) ohne Probleme und stockt plötzlich bei b):

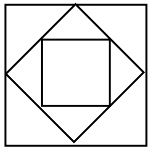
Wenn ich da rechts gegen unendlich gehe, dann kommt doch zu der Fläche immer was dazu. Die wird also immer größer – wie soll ich denn da einen Wert angeben? Das wird doch dann … unendlich! Weil da immer was dazu kommt!

Arbeitsaufträge:

- Analysieren Sie, welches Problem Pia hat.
  Beleuchten Sie dabei den mathematischen Hintergrund des Problems.
- Beschreiben Sie ausführlich, wie Sie Pia im individuellen Gespräch die Aufgabe erklären könnten. Wie würden Sie dabei vorgehen und warum?
  Führen Sie auch Beispiele auf, die Sie benutzen würden, um das Problem zu klären!

Die gestellte Aufgabe war mit schulischen Mitteln lösbar, ihre Interpretation und Problematik erforderte jedoch universitäres Hintergrundwissen und eine didaktisch sensible Fachkompetenz. Sie zielte darauf ab, das mathematische Phänomen unendlichen, aber begrenzten Wachstums, d.h. der Konvergenz von Reihen, und seine Problematik für das Alltagsverständnis von Schülerinnen und Schülern zu erkennen und aufzulösen: Wie ist es möglich, dass zu „etwas“ immer noch „etwas dazu kommen“ kann und trotzdem ein fester Wert nicht überschritten wird? (Der hier zur schnelleren Lesbarkeit eingefügte Funktionsgraph war in der Evaluations-Aufgabenstellung nicht mit angegeben.)

Die Studierenden, die unsere Analysis-Veranstaltung besucht hatten, erkannten mehrheitlich den für das Problem ausschlaggebenden zentralen Begriff des Grenzwertes einer unendlichen Summe und seine Bedeutung. Sie bearbeiteten die Aufgabe unter Rückgriff auf die in der Veranstaltung gesehenen Beispiele und beleuchteten das Problem auf unterschiedlichen Komplexitätsstufen. Um der Schülerin Pia das Phänomen zu erklären, wurden sowohl Beispiele wie unendliche Reihen und Dezimalbrüche als auch geometrische Veranschaulichungen des Phänomens angeführt.

> ***Antwortbeispiel 1:*** *„Man könnte der Schülerin das Problem folgendermaßen näher bringen […]: In das eine Quadrat zeichne ich nun ein zweites, kleineres hinein, dessen Seiten [...] jeweils genau auf der Mitte der Seiten des ursprünglichen Quadrates zusammentreffen.*
>
> 
>
> *[...] Nun kann man fortfahren und weitere Quadrate einzeichnen [...] ohne dass sich der Flächeninhalt verändert. Jetzt sollte man zu der Erkenntnis kommen, dass man unendlich viele Quadrate einzeichnen kann, die immer kleiner werden [...]. Aber wie kann das sein, dass man unendlich viele Quadrate einzeichnen kann, der Flächeninhalt aber trotzdem einen endlichen Wert besitzt? Damit ist man wieder bei der Ausgangsfrage.[...]“*

> ***Antwortbeispiel 2:*** *[...] Eine andere Möglichkeit wäre vielleicht, es mit Dezimalzahlen zu versuchen zu erklären, dass unendliche Werte doch endlich sein können. Das kann man eventuell mit dem Begriff der Periode im Zusammenhang mit Brüchen tun. 0,3333333... und 1/3. Hier wird die Zahl 0,33333... = 1/3 zwar unendlich lang, dennoch ergibt das Dreifache dieser Zahl nur 1. Was wohl von der Schülerin als eine endliche Zahl angesehen werden dürfte. Wenn die Schülerin verstanden hat, dass Unendliches auch endliche Ergebnisse haben kann (Was ist das eigentlich für ein Unfug, den sich die Mathematik da ausgedacht hat???) [...] müsste man ihr noch den Begriff des Grenzwertes erklären [...]“*

Bei der zweiten Antwort wird deutlich, wie der Student sich im Prozess der Bearbeitung begonnen hat zu *wundern* – „Was ist das eigentlich für ein Unfug...“ – Insgesamt stellte sich heraus, dass ein souveränes mathematisches Hintergrundwissen dafür ausschlaggebend war, dass die Studierenden das Problem der Schülerin Pia auch erkannten.

Einige Studierende scheiterten dagegen in ihren Erklärungsversuchen daran, dass sie das Wundernswerte an dem *Phänomen* der Konvergenz einer unendlichen Reihe nicht sahen: Obwohl immer noch „etwas dazukommt“, kann ein solcher Prozess konvergieren – muss aber nicht! Es war auffällig, dass eine Bearbeitung der Aufgabe *ohne* Bezug zum universitären Wissen dazu führte, dass die Studierenden kaum Erklärungsbedarf sahen, der über eine kleinschrittig erklärtes kalkülorientiertes Verfahren zur Bestimmung des uneigentlichen Integrales hinausging:

> ***Antwortbeispiel 3:*** *„[...] Bei der vorliegenden Aufgabe muss die Schülerin ein unbestimmtes Integral bilden bzw. lösen. Das „Problem“ ist, dass ein unbeschränkter Definitionsbereich auftritt. Sie hat vor, das Intergral über die Funktion f(x) zu bilden. Die obere Grenze „unendlich“ kann sie nicht in die Stammfunktion einsetzen. [...] Als Beispiel kommt etwa das Integral mit oberer Grenze „3“ in Frage [...] anschließend würde ich sie dann etwa das Integral mit oberer Grenze „6“ bestimmen lassen“*

Bei Lösungen dieses Typs erkannten die Studierenden oft selbst nicht, dass die Konvergenz der Fläche nicht selbstverständlich ist, und Pia allen Grund hatte, sich zu wundern. Dies wurde deutlich, da diese Studierenden in ihren weiteren Ausführungen häufig auf das „ähnliche“ Beispiel $f(x)=1/x$ verwiesen, die Situation allein am Graphen erklären wollten („das sieht man doch!“), oder ungeeignete Alltagsbeispiele zu Hilfe nahmen.

Die Fähigkeit, ein solches Verständnisproblem einer Schülerin zu erfassen und geeignete Beispiele zu finden, die – in diesem Fall – das Phänomen des Grenzwertprozesses adäquat veranschaulichen, erfordert offensichtlich ein präzises mathematisches Hintergrundwissen. Die dafür notwendige Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik im Wesentlichen in die Fachveranstaltung der Analysis zu integrieren, hat sich daher als durchaus erfolgreich erwiesen. Die Studierenden aus dem Projekt konnten in der Mehrheit auf ein solches mathematisches Hintergrundwissen zurückgreifen und taten es auch. Damit demonstrierten sie, dass sie nicht nur stabile Grundvorstellungen eines so zentralen Konzeptes wie der Konvergenz entwickelt hatten, sondern auch bereit und in der Lage waren, ihr Wissen in einem Kontext, der über die Analysis-Veranstaltung selbst hinaus ging, sinnvoll einzusetzen. Sie hatten in der Veranstaltung selbst Argumentationen auf verschiedenen Exaktheitsstufen erleben können und bewiesen mit den gesehenen Beispielen, dass sie diese Fähigkeit erworben haben und ohne Aufforderung aktiv einsetzen. Die Präzision des akademischen Fachwissens (z.B. die Unterscheidung des Konvergenzverhaltens der unendlichen Reihen $\sum 1/n$ und $\sum 1/n^2$) wurde in den Lösungen häufig als Hilfe genommen, um sich selbst den Sachverhalt klar zu machen und ihre Reaktion auf das Verständnisproblem der Schülerin nicht auf eine (fehlerhafte) Erklärung zu reduzieren.

Insgesamt zeigte uns die Evaluation, wie notwendig verstärkte Brückenschläge zwischen Schul- und Hochschulmathematik sind, vermutlich ist eine von fünf Aufgaben pro Woche dazu sogar zu wenig. So diente die Evaluationsaufgabe für einige Studierende auch als z. T. erschreckende „Standortbestimmung“, da gerade Teilnehmer der Vergleichsgruppe (aber nicht nur die) feststellen mussten, dass sie schon an der Berechnung des Integrals scheiterten. Die Einsicht „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule...“ einer Studierenden legt nahe, eine solche Aufgabe als zusätzliche Motivationshilfe zukünftig sogar an den Anfang einer solchen Intervention zu stellen.

Fazit

Als Ergebnis der Intervention und der darauf folgenden Evaluation sehen wir einen klaren Handlungsbedarf und eine in Zukunft noch verstärkt fortzuführende Zusammenarbeit zwischen den fachinhaltlichen Veranstaltungen und der Fachdidaktik als „Brückendisziplin". Das Projekt war ein Musterbeispiel für eine solche instruktive und produktive Zusammenarbeit, um der Herausforderung einer „Verbindung zwischen fachinhaltlichem Wissen, pädagogischen Kontextwissen und schulpraktischen Handlungswissen" im Sinne Wolfgang Henns gemeinsam zu begegnen.

Literatur

Bender, P.; Beyer, D.; Brück-Binninger, U.; Kowallek, R.; Schmidt, S.; Sorger, P.; Wielpütz, H.; Wittmann, Erich Ch. (1999). Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und –lehrer. In: Journal für Mathematik-Didaktik 20(4), S. 301-310.

Blum, W.; Henn, H.-W. (2003). Zur Rolle der Fachdidaktik in der universitären Gymnasiallehrerausbildung. In: MNU. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht 56(2), S. 68-76.

Borneleit, P.; Danckwerts, R.; Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Journal für Mathematikdidaktik 22 (1), S. 73-90.

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2004). Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Berlin-Heidelberg: Springer.

Cooney, Th. J.; Wiegel, H. G. (2003). Examining the Mathematics in Mathematics Teacher Education. In: Bishop, A. J. et al. (Hrsg.). Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer, S. 795-828.

Danckwerts, R.; Prediger, S. & Vasarhelyi, E. (2004). Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen. In: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 12 (2), S. 76-77.

DMV (1979). Zur Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik. Denkschrift der Deutschen Mathematik-Vereinigung. Online erhältlich unter http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/gdm/veroeffentlichungen_stellungnahmen.html

Griesel, H.; Postel, H. (1999) (Hrsg). Elemente der Mathematik. Hannover: Schroedel.

Hefendehl-Hebeker, L. (1998). Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. In: Mathematische Semesterberichte 45, S. 189-206.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.). Konsequenzen aus PISA. Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag, S. 141-189.

Henn, H.-W. (2000). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In: Förster, F. et al. (Hrsg.). Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe Bd. 6, Hildesheim: Franzbecker, S. 1-13.

Henn, H.-W. (2003). Elementare Geometrie und Algebra. Berlin-Heidelberg: Springer.

Jahnke, Th. (2005). Unendlich. Mathe-Welt. In: Mathematik lehren 132.

Müller, G.; Steinbring, H.; Wittmann, E. C. (2004) (Hrsg.). Arithmetik als Prozess, Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.