Susanne Prediger

Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben

Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben

Vorfassung des Artikels in Praxis der Mathematik in der Schule 48 (2006) 11.

Zusammenfassung: Tragfähige Vorstellungen müssen nicht nur zum Bruchbegriff selbst, sondern auch zu allen Operationen mit Brüchen aufgebaut werden. Dafür lohnt es sich, den inhaltlichen Kerngedanken in den Mittelpunkt zu rücken und nicht die nachträgliche Deutung eines formalen Verfahrens. Im Artikel werden dazu Vorschläge zusammengestellt und Aufgaben für eine alltagstaugliche Diagnostik angeboten.

Forderung: Tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufbauen

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt." (Malle 2004, S. 4)

Günther Malle hat mit diesen Bemerkungen zu Vorstellungen in der Bruchrechnung einen wichtigen und in der didaktischen Literatur viel formulierten Befund auf den Punkt gebracht. Es gibt daher auch schon zahlreiche überzeugende Vorschläge, wie inhaltliche Vorstellungen von Brüchen konsequenter aufgebaut werden können (z. B. Streefland 1991, Wiese 1995, Hefendehl-Hebeker 1996, Winter 1999, Malle 2004 u.v.m.).

Während viele dieser Vorschläge sich zunächst auf den Aufbau adäquater Basis-Vorstellungen vom Bruchbegriff selbst konzentriert haben, gibt es inzwischen auch einige Vorschläge, wie der *weitere* Umgang mit Brüchen ebenfalls vorstellungsorientiert aufgebaut werden kann und sollte.

Beispiel Gleichwertigkeit

So macht es z. B. einen erheblichen Unterschied, ob das Erweitern und Kürzen formal eingeführt wird und gleichwertige Brüche als diejenigen definiert werden, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen (wie in vielen Schulbüchern), oder ob Erweitern und Kürzen als der *syntaktische Weg zum Finden gleichwertiger Brüche* erst eingeführt wird, wenn zuvor *Gleichwertigkeit als inhaltliches Konzept* in verschiedenen Bruchvorstellungen bestimmt ist, wie z. B. in *Abb. 2* (links Saras Lösung aus einer Klassenarbeit der Autorin, 6.Klasse im Dezember 2005, rechts Dorians Lösung aus einer empirischen Untersuchung, vgl. Prediger 2006).

Ein solcher Lernweg, der das inhaltlich beschriebene Konzept der Gleichwertigkeit von Brüchen in den Vordergrund rückt, kann z. B. so organisiert werden wie in *Abb. 1* skizziert.

Der Kalkül erscheint so nicht als das Zentrum, dem wir eine Deutung geben, sondern als Denkentlastung für ein inhaltlich längst mit Sinn gefülltes und vertrautes Konzept.

Erweitern und Kürzen als die rechnerische Suche nach gleichwertigen Brüchen
Ein möglicher Lernweg

Lernende...

1. ... entdecken, dass es unterschiedliche Brüche gibt, die denselben Anteil oder eine verwandte Verteilungssituation beschreiben. Diese Brüche nennen wir gleichwertige Brüche.
2. ... erklären in unterschiedlichen inhaltlichen Deutungen, wieso zwei Brüche gleichwertig sind (vgl. Abb. 2).
3. ... finden zu einer Bruchzahl möglichst viele gleichwertige Brüche.
4. ... entdecken das Erweitern und Kürzen als Möglichkeit, auf der rechnerischen Ebene sehr schnell gleichwertige Brüche zu finden.
5. ... gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Überprüfen, dass die inhaltliche und die formale Ebene zusammenpassen. (Erhalte ich durch Kürzen wirklich gleichwertige Brüche?)
6. Nochmalige Deutung des Kalküls auf der inhaltlichen Ebene: Erweitern lässt sich deuten als Verfeinern von Anteilen, Kürzen als Vergröbern

***Abb. 1**: Inhalt vor Kalkül – möglicher Lernweg*

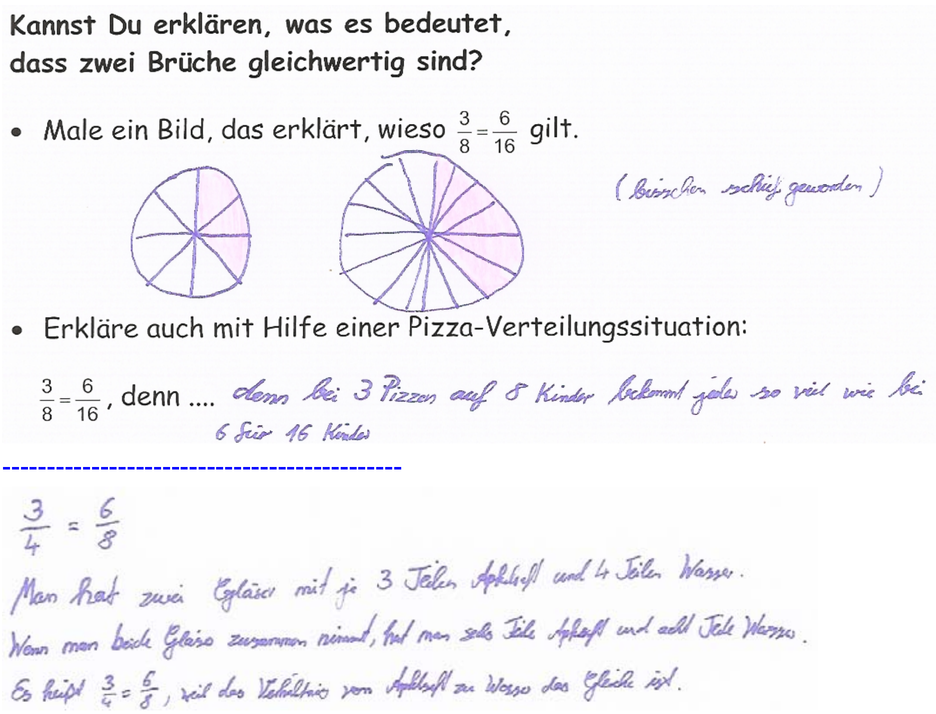


***Abb. 2**: Saras und Dorians inhaltliche Deutungen der Gleichwertigkeit*

Eine Aufgabenstellung für den vierten Schritt des Lernwegs wäre etwa:

Nun haben wir viele gleichwertige Brüche gesucht und uns dazu immer Bilder gemalt oder Pizza-Verteilungs-Geschichten überlegt, z. B. $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$ *oder* $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

Nina sagt: „Die Mühe mit den Bildern muss ich mir gar nicht immer machen! Mir ist aufgefallen, dass ich nur oben und unten dasselbe machen muss!“
Schau Dir gleichwertige Brüche an. Was könnte Nina meinen? Hat sie Recht? Kannst Du daraus eine besser verstehbare Regel aufschreiben, wie man ganz schnell gleichwertige Brüche findet?

Beispiel Multiplikation

Was kann man sich inhaltlich unter dem Zahlensatz $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$ *vorstellen, zu welcher Geschichte könnte diese Rechnung eigentlich gehören?*

In einem Test (in Prediger 2006) haben nur 17% der befragten Gymnasiasten aus Klasse 7 darauf eine richtige Antwort geben können.

In anschließenden Interviews zeigte sich, dass gerade die stabil aufgebaute Vorstellung von Brüchen als Anteile eines Ganzen einigen Lernenden auch im Wege stehen kann (vgl. Prediger 2006): Der Versuch, ein geeignetes Bild von der Situation zu entwerfen, scheitert oft an der Gewohnheit, jeden einzelnen Bruch „als Pizzastück zu malen“ (vgl. *Abb. 3*).

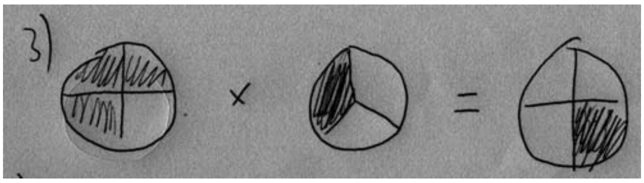


Abb. 3*: Florians Darstellung der Multiplikation*

Multiplizieren von Brüchen kann dagegen nur interpretieren, wer bereit ist, den Faktoren unterschiedliche Rollen zuzubilligen (die sie ja auch für natürliche Zahlen eigentlich bereits haben), denn man muss einen Bruch statt als Anteil als Operator zu deuten: ¾ von einem Drittel sind ein Viertel. Dieses Phänomen, dass eine Überbetonung der Basisvorstellung des Bruchs als Anteil eines Ganzen die hier notwendige Flexibilität in den inhaltlichen Deutungen verstellt, war immer wieder zu beobachten.

Jenseits der fehlenden Flexibilität in der Interpretation der beteiligten Brüche bleibt die zentrale Herausforderung für den Aufbau einer tragfähigen Interpretation der Multiplikation als Anteil-Nehmen, den Zusammenhang zwischen „mal“ und „von“ zu erfassen.

Ein geeigneter Lernweg lässt sich ganz analog zu dem Beispiel der Gleichwertigkeit anlegen: Die Operation Multiplizieren sollte nicht als einfache Regel möglichst schnell eingeführt und im Nachhinein mit einer inhaltlichen Deutung versehen werden. Statt dessen sollten zunächst – unbelastet vom Kalkül - Anteile von Anteilen untersucht und dann im Nachhinein die dabei vollzogenen Denkschritte in der formalen Multiplikation zusammengefasst werden. Wer so vorgeht, kann formale Rechenregeln als hilfreiche Verkürzung eines bereits durchdrungenen Vorgehens erfassen und würdigen.

Eine dafür interessante Lernumgebung bietet das Zahlenbuch 6 (Affolter et al. 2001), das sich den Anteilen von Anteilen in einem handlungsorientierten Zugang durch Falten von Papier nähert (vgl. *Abb. 4.*).

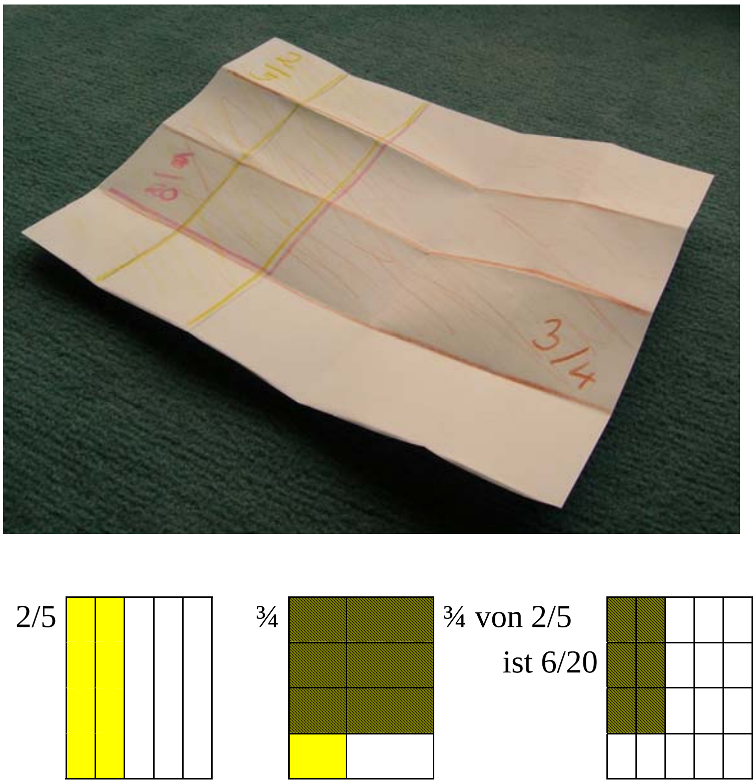


Abb. 4*: 3/4 von 2/5 gefaltet – auf dem Weg zum allgemeinen Gesetz*

Die Rechteckrepräsentation ist im Prinzip nicht neu, sie wird in zahlreichen Schulbüchern und z. B. von Jannack/Koepsell (1995) bereits vorgeschlagen. Sie gewinnt für den hier vorgeschlagenen Lernweg jedoch noch größere Bedeutung, zumal auf die Zergliederung der Multiplikation von Brüchen in viele disparate Fälle (Bruch mal natürliche Zahl, natürliche Zahl mal Bruch, Stammbrüche etc.) verzichtet und direkt eine breite Erfahrung mit dem allgemeinen Fall ermöglicht wird.

Wer diese Untersuchungen zum Anteil von Anteilen (z. B. in der Falt-Umgebung, Abb. 4) intensiv und eigenständig durchdrungen hat, kann danach auch die Rechenregel „Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner" für das Anteilnehmen von Anteilen als entlastende Abkürzung finden:

Im Nenner stehen die Anzahlen von Zeilen und Spalten an, Nenner mal Nenner gibt also die gesamte Zahl der Kästchen an. Die Zähler beschreiben die Anzahlen der markierten Zeilen und Spalten, Zähler mal Zähler also die Zahl aller markierten Kästchen. ¾ von 2/5 ist somit $\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}$.

Die Berechtigung, diese Operation mit dem von den natürlichen Zahlen bekannten Malpunkt zu versehen, und als $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ zu schreiben, ist keine Selbstverständlichkeit: Wieso nennen wir diese unterschiedlichen Operationen „Anteile von Anteilen nehmen" und „Multiplizieren von natürlichen Zahlen" (meist gedacht als fortgesetztes Addieren) überhaupt gleich? Die Einsicht in die Parallelität der Operationen kann durch Betrachtung von Flächeninhalten mit Seitenlängen aus natürlichen Zahlen und Brüchen hergestellt werden (vgl. Winter 1999).

Mit einem solchen vorstellungsorientierten Unterbau sind dann die im Einführungsartikel diskutierten Fragen zu verändertem Monotonieverhalten der Multiplikation gut bewältigbar, denn wer Multiplizieren nicht als fortgesetztes Addieren interpretiert, sondern über eine Flächeninhaltsvorstellung oder eine Anteil-nehmen-Vorstellung verfügt, muss sich nicht darüber wundern, dass Multiplizieren nicht immer vergrößert.

Vorstellungen von Lernenden erfassen

In gewisser Weise wurden inhaltliche Vorstellungen wie die angesprochenen in sorgfältig konzipierten Einführungsbeispielen schon immer herangezogen – kein Schulbuch lässt sie völlig aus. Doch zeigt sich, dass oft der Bereich der inhaltlichen Vorstellungen zu schnell verlassen und zum Kalkül übergegangen wird. Übungsphasen und Klassenarbeit konzentrieren sich schließlich auf den Kalkül, die inhaltlichen Vorstellungen werden dann nur noch wenig aktiviert.

Und so zeigen empirische Studien immer wieder, dass der Aufbau von adäquaten Vorstellungen bei vielen Schülerinnen und Schülern nur begrenzt gelungen ist (Wartha 2005, Padberg 2002, Prediger 2006).

Lehrerinnen und Lehrer sind von den Ergebnissen solcher Interviews oft konsterniert: So schräge Vorstellungen haben meine Kids? Wieso eigentlich fallen uns diese Schwierigkeiten im Unterrichtsalltag so wenig auf?

Natürlich ist im normalen Unterricht einer Klasse mit 30 Lernenden keine Zeit für 45-minütige Interviews und aufwändige Auswertungen hinterher. Das bedeutet jedoch nicht, dass man deswegen nichts über das inhaltliche Denken der Schülerinnen und Schüler erfahren kann. Notwendig sind alltagstaugliche diagnostische Aufgaben, mit denen sich Vorstellungen auch schriftlich erheben lassen. Das betrifft sowohl die inhaltlichen Interpretationen der Brüche und ihrer Operationen als auch die Vorstellungen über Eigenschaften der Operationen (wie „Multiplizieren vergrößert“, zu jeder Zahl gibt es eine nächst größere u.v.m.).

Als diagnostische Aufgaben eignen sich unterschiedliche Aufträge, vor allem wenn sie die Lernenden zum Versprachlichen ihres Denkens anregen (vgl. z. B. Leuders 2006).

Üblicherweise werden vorhandene Vorstellungen durch *Textaufgaben* erhoben (vgl. z. B. Wartha 2005). Kann eine Schülerin die Aufgabe erfolgreich bearbeiten, so wird ihr der erfolgreiche Aufbau der gefragten inhaltlichen Vorstellung bescheinigt. So zielt etwa Aufgabe 6 der *Kopiervorlage* auf die Bruchvorstellung vom relativen Anteil bzw. eine Vorstellung vom Multiplizieren als Anteilnehmen-von, und Aufgabe 9 erfordert die nicht selbstverständliche Grundvorstellung vom Dividieren als „passen in“ statt dem oft dominierenden „Verteilen“.

Wenn ein Schüler die Aufgabe allerdings nicht lösen kann, wissen wir dennoch wenig über die Hintergründe und darüber, wie er die Operation inhaltlich interpretiert. Da ist die umgekehrte Frage („*Finde eine Situation* oder Textaufgabe zu folgender Rechung“ wie in Aufgabe 2, 7 und 10) insofern aufschlussreicher, als sie divergente Schülerlösungen zulässt und damit ein ganzes Spektrum individueller Vorstellungen offen legt. Die andernorts (Kuntze/Prediger 2005, Abb. 4) zusammengestellten Antworten von Siebtklässlern zu dem Auftrag, multiplikative Situationen zu formulieren, liefern einen Eindruck von dem diagnostischen Potential der Rechengeschichten.

Die dabei verlangte Kompetenz zum Übersetzen mathematischer Zusammenhänge in (auch mal vorgegebene) Situationen ist ein zentraler Baustein eines vorstellungsorientierten Umgehens mit Brüchen. Es ermöglicht z. B. (vgl. Aufgabe 3) die Erklärung von mathematischen Zusammenhängen wie der Gleichwertigkeit in unterschiedlichen außermathematischen Kontexten zu verankern und somit an verschiedene Denkweisen der Lernenden anzuschließen (vgl. Abb. 5).

„Gülüm, meint 2/3 ist größer als 2/4, denn wenn ich zwei Pizzen auf drei Kinder verteile, dann bekommt jedes einzelne Kind mehr, als wenn ich auf vier Kinder verteile. Ich mal mir lieber die Stücke hin und sehe, Drittel sind größer."

Abb. 5*: Nils Antwort auf Aufgabe 3 zur Deutung der Größer-Beziehung (6. Klasse Gesamtschule)*

Noch expliziter können sogenannte *kognitionsorientierte Aufgaben* (vgl. Kaune 2001) auch die Auseinandersetzung mit typischen (Fehl-)Vorstellungen anregen und somit noch tiefere Einblicke in das Denken der Lernenden ermöglichen. So zielt Aufgabe 5 auf eine typische Fehlvorstellung zu Beginn des Umgehens mit Brüchen, Aufgabe 4 auf die subtilere, aber mindestens ebenso häufige Verwechslung des relativen Anteils einer Gesamtgröße (hier 3 Pizzen) mit dem Anteil eines Ganzen: 3/5 Pizza sind eben 1/5 von 3 Pizzen, das kann durchaus verwirren!

Aufgabe 8 thematisiert die intuitive Regel „Multiplizieren vergrößert" (siehe Einführungsartikel und Prediger 2004 für weitere Aufgaben). Das metakognitive Potential solcher Fragen wird an Hannes Antwort deutlich: „Ja, das kann ich erklären, sehr gut sogar, denn so habe ich auch zuerst gedacht, weil ja Multiplizieren eigentlich immer vergrößert. Aber ich hatte mich getäuscht. Kann man am Beispiel sehen. Wieso, weiß ich komischerweise immer noch nicht." Die Gesetzmäßigkeit an sich ist Hanna inzwischen vertraut, eine inhaltliche Begründung kann sie aber noch nicht angeben. Auch den Verweis auf Aufgabe 7, der ihr dies hätte erleichtern können, konnte sie für sich noch nicht fruchtbar machen.

Ähnliche Fragen sind für viele weitere Aspekte hilfreich, insbesondere zur Ordnung und zur Dichtheit der Brüche, zu anderen inhaltlichen Vorstellungen von Brüchen (z. B. ihre Deutung als Verhältnisse) und daraus folgenden anderen Interpretationen für die Ordnungsrelation, für Gleichwertigkeit und allen Rechenoperationen (vgl. Wartha 2005 und Prediger 2004).

Und was dann?

Antworten wie die von Hanna geben der Lehrkraft wichtigen Aufschluss über das Denken ihrer Schülerinnen und Schüler. Und sie geben dem Unterricht einen wichtigen Anlass, um über die explizierten Vorstellungen noch einmal ins Gespräch zu kommen. Gerade bei den ergebnisoffenen Aufgaben des Diagnosebogens ist ein intensiver Vergleich der Antworten und ein sorgfältiges gemeinschaftliches Abwägen über ihre Angemessenheit außerordentlich bildend, z. B. in einem stillen Schreibgespräch (Gerbode et al. 2005).

Manchmal wird dies ausreichen, um nur verschüttete Vorstellungen wieder hervorzuholen, an anderen Stellen zeigt sich dann die Notwendigkeit, dem Vorstellungsaufbau noch einmal etwas Raum im Unterricht zu geben.

Es ist für mich immer wieder erstaunlich, dass auch erfahrene Lehrerinnen und Lehrer, die die Leistungen ihrer Lernenden im Allgemeinen gut einschätzen können, den Entwicklungsstand der *inhaltlichen Vorstellungen* ihrer Schülerinnen und Schüler oft überschätzen. Gerade mit etwas Abstand zu den Einführungsphasen, in den höheren Jahrgängen, scheint dies besonders kritisch. Wer dann doch noch mal genauer hinschaut, reibt sich oft die Augen.

Probieren Sie es doch selbst einmal aus und fragen Sie Ihre Lernenden!

Literatur

Affolter, Walter et al. (2001): Zahlenbuch 6, Kett und Balmer, Zug.

Gerbode, Babette / Richter, Jutta / Schluckebier, Dieter (2005): Simsen (SMS) im Mathematikunterricht - Stumme Schreibgespräche, in: PM (47) 5, S. 12-17.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1996): Brüche haben viele Gesichter, in: Mathematik lehren 78, S. 20-48.

Jannack, Wilfried / Koepsell, Andreas (1995): Multiplizieren von Bruchzahlen, in: Mathematik lehren 73, S. 54-58.

Kaune, Christa (2001): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“, in: Der Mathematikunterricht 35, S. 35–46.

Kuntze, Sebastian / Prediger, Susanne (2005): Ich schreibe, also denk’ ich. Über Mathematik schreiben, in: Praxis der Mathematik in der Schule 47 (5), S. 1-6.

Leuders, Timo (2006): „Erläutere an einem Beispiel...“ Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern, in Friedrich Jahresheft XXIV: Diagnostizieren und Fördern, S. 78-83.

Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum, Heidelberg.

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?, in: Mathematik lehren 123, S. 10-13.

Prediger, Susanne (2006): Continuities and Discontinuities for fractions. A proposal for analysing in different levels, in: Novotna, Jarmila (Hrsg.): Proceedings of the 30th PME, Prag.

Streefland, Leen (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht.

Wartha, Sebastian (2005): Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim, S. 593-596.

Wiese, Ilse (1995): Meine erstes Bruchalbum, in: Mathematik lehren 73, S. 17-19.

Winter, Heinrich (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript, RWTH Aachen. (http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf, letzter Zugriff April 2006)

Adresse der Autorin:

Prof. Dr. Susanne Prediger

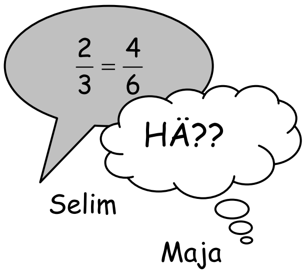
Universität Dortmund, IEEM

prediger@math.uni-dortmund.de

Wie stellst Du Dir das Umgehen mit Brüchen vor?

1. Wie würdest Du Deiner achtjährigen Nachbarin erklären, was 2/5 sind? Findest Du auch einen zweiten Weg? (z. B. ein Bild, eine Situation, ...)

2. Selim behauptet, dass $\frac{2}{3}$ genau so groß ist wie $\frac{4}{6}$, aber Maja glaubt ihr das nicht. Kannst Du ein Bild malen oder eine Situation beschreiben, die das erklärt? Kennst Du noch zwei andere Brüche, die denselben Wert haben?



3.

2/3 ist größer als 2/4 !
Denn wenn ich zwei Pizzen auf drei Kinder verteile, dann bekommt jedes einzelne Kind ...

Gülüm

Leider wurde Gülüm unterbrochen. Kannst Du zu Ende erklären, was Gülüm meint? Vergleiche auch zwei schwierige Brüche, welcher größer ist? Erkläre auch, warum du die Brüche für schwieriger hältst.

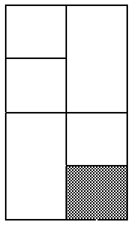
4. In einer Pizzeria teilen sich 5 Kinder 3 Pizzen. Kevin sagt, dann bekommt jeder 3/5 Pizza. Martin wundert sich.

Aber wir teilen doch durch Fünf, wieso bekommt dann nicht jeder 1/5?

Martin

Wer hat Recht? Was ist der Denkfehler des anderen?

5. Anna sagt, der schraffierte Teil ist ein Sechstel des ganzen Rechtecks. Erkläre, was sie sich wohl gedacht hat, und wieso das noch nicht ganz stimmt.



6. In einer Lostrommel beim Klassenfest der 6b sind noch 18 Lose. 2/3 davon sind Nieten. Wie viel Nieten sind in der Lostrommel? Erkläre, wie Du das ausgerechnet hast.

7. Denke Dir eine Situation oder eine Textaufgabe aus, die zu der Rechnung 2/3 · 3/4 passt und rechne aus.

8. Laris wundert sich. Wieso wundert er sich wohl? Hat er Recht? Kannst Du es ihm erklären, woran das liegt? (Vielleicht hilft Dir dabei Aufgabe 7!)

Hä? Wieso ist das Ergebnis von 2/3 · 3/4 kleiner als 2/3 und 3/4?

Laris

9. Chu baut ein Puppenhaus. Die Wand des Puppenhauses soll 4/5 m hoch werden. Sie wird aus kleinen Latten gebaut, die 1/10 m breit sind. Welche Rechnung muss man wählen, um herauszubekommen, wie viel Latten übereinander genagelt werden müssen? Kreuze an und begründe.

☐ $\frac{4}{5} - \frac{1}{10}$ ☐ $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10}$

☐ $\frac{4}{5} : \frac{1}{10}$ ☐ $\frac{1}{10} : \frac{4}{5}$

10. Suche eine Situation oder eine Textaufgabe, die zu der Rechnung 21 : ¾ passt.