Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln

Lisa Hefendehl-Hebeker und Susanne Prediger

Vorfassung des Artikels erschienen in Praxis der Mathematik in der Schule 48 (2006)11, S. 1-7.

Zusammenfassung:

Der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen ist eine Kulturleistung von höchster Perfektion, die im Unterricht der Sekundarstufe durch sukzessive Erweiterung der Zahlbereiche nachvollzogen wird. Aus der Perspektive der Lernenden zeigen sich dabei Herausforderungen und Hürden, die nur durch gewandelte Zahlvorstellungen zu überwinden sind. Der Artikel sensibilisiert für Hürden und zeigt Wege zu ihrer Überwindung auf.

> „Wir rechnen jetzt auch mit Minuszahlen. Die sind eigentlich ganz okay, aber manchmal ziemlich komisch. Guck mal, da soll –10 weniger sein als –4, das haben sich die Mathe-Lehrer echt seltsam ausgedacht. Warum ist das nicht wie bei den normalen Zahlen? Deswegen mach ich das manchmal auch andersrum, das ist dann falsch...“

So sagte uns der Siebtklässler Anton nach einer Woche Beschäftigung mit negativen Zahlen im Unterricht. Seine Aussage ist ein typisches Beispiel für die Irritation, die die Erweiterung der Zahlbereiche bei Lernenden auslösen kann, wenn liebgewordene Gewohnheiten über die „normalen Zahlen“ (also die bereits vertrauten natürlichen Zahlen) plötzlich in Frage gestellt werden. Antons Aussage hat uns durch seine bemerkenswerte Reflexionsfähigkeit überrascht: Er sieht selbst, dass seine Schwierigkeiten damit zu tun haben könnten, dass er zu der Ordnungsrelation auf den negativen Zahlen noch keine passende inhaltliche Vorstellung entwickeln konnte. Und er weiß, oder ahnt es vielleicht, dass gewisse Aspekte im Umgang mit neuen Zahlbereichen Definitionssache sind. Wie es aber zu den geltenden Festsetzungen gekommen ist, das müsste für Anton genauer ausgeführt werden. Dadurch hätte er eine Chance, nicht nur die negativen Zahlen besser zu verstehen, sondern auch einen exemplarischen Einblick in typische Arbeitsweisen des Faches Mathematik zu gewinnen und nebenbei zu erfahren, dass die Gestaltungsrechte der Mathe-Lehrer an der inneren Kohärenz dieses Faches ihre Grenzen finden.

Zahlen gehören zu den Urstoffen, aus denen Mathematik gemacht wird. Der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen ist eine in Jahrtausenden gewachsene Kulturleistung von höchster Perfektion. Bis zu ihrer Vollendung war manches geistige Hindernis zu überwinden.

Diese Kulturleistung zumindest partiell nachzuvollziehen, ist unabdingbarer Teil des schulischen Curriculums. Die Zahlbereichserweiterungen bilden daher in der Mittelstufe aller Schularten ein Kernthema und für Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung.

Denn ebenso wie Anton ringen viele unserer Schülerinnen und Schüler immer wieder damit, dass ihre Zahlvorstellungen nicht mehr passen, wenn Zahlbereiche erweitert werden. In empirischen Forschungsprojekten (z. B. Bell et al. 1981, vom Hofe/Wartha 2004, Prediger 2006) wurde nachgewiesen, dass die erforderlichen Wandlungen in den Vorstellungen eine bedeutende Fehlerquelle im Umgang mit neuen Zahlbereichen darstellen und daher besonderer didaktischer Aufmerksamkeit bedürfen. Deswegen widmen wir ihnen dieses Heft.

Wir beginnen diesen einführenden Artikel mit der Frage, wozu überhaupt Zahlbereichserweiterungen notwendig sind und formulieren dabei auch für Lernende sinnstiftende Motive. Danach sollen die dabei auftauchenden Hürden im Verständnis etwas näher beleuchtet werden, bevor im dritten Abschnitt aufgezeigt wird, dass diese Hürden in der mathematischen Sachstruktur begründet sind. Im letzten Abschnitt und vor allem den unterrichtspraktischen Beiträgen dieses Heftes sollen dann Vorschläge gemacht werden, wie auf die Hürden im Lernprozess eingegangen werden kann.

1. Zahlbereichserweiterungen haben einen Sinn!

Warum und wozu werden Zahlbereiche überhaupt erweitert? In innerfachlicher Perspektive geschieht dies, um für mehr Gleichungstypen allgemeine Lösungen zu erhalten. So geben die in IN unlösbaren Gleichungen $5+x=3$ und $3x = 5$ Anlass zur Erweiterung auf die ganzen Zahlen bzw. die Bruchzahlen.

Die für Schülerinnen und Schüler zunächst bedeutsameren Anlässe zur Einführung neuer Zahlen liegen auf der Ebene des Zählens und Messens: Es werden zusätzliche Zahlen benötigt, wenn die verfügbaren Zahlen ihre Aufgabe, quantitative Angaben zu präzisieren, nicht mehr zufriedenstellend erfüllen. Konkret sind diese Anlässe in *Abb. 1.* dargestellt:

- Die *natürlichen Zahlen* beschreiben ursprünglich *Anzahlen* abzählbarer Dinge. Durch den Vorgang des Abzählens werden die Dinge in eine Reihenfolge gebracht. Daher sind die natürlichen Zahlen zugleich auch *Ordnungszahlen.*
- Die *Bruchzahlen* erhöhen die Genauigkeit beim Teilen und Messen: Wenn beim Teilen ein Rest bleibt, kann man diesen weiter teilen, indem man die Einheit in Stücke bricht. Wenn beim Messen die Genauigkeit nicht ausreicht, kann man kleinere Einheiten hinzuziehen. Die so entstehenden Zahlen haben viele Gesichter (Hefendehl-Hebeker 1996): Sie können als Teil eines oder mehrerer Ganzer auftreten, sie können aber auch multiplikative Vergleiche angeben (ein Stab ist 3/5 mal so lang wie ein anderer) oder Verhältnisse (z. B. Steigungen) beschreiben.
- Auch die *negativen Zahlen* erweitern die Möglichkeiten beim Messen: Will man Größen relativ zu einer willkürlich gewählten Vergleichsmarke bestimmen (zum Beispiel Wasserstände in Bezug auf einen Normalstand), so ist dies ein Anlass, den Zahlenstrahl zur Zahlengeraden zu erweitern und unter die Nullmarke hinab zu zählen und zu messen. Die *rationalen Zahlen* sind daher geeignet, gerichtete Größen zu beschreiben.
- Schon die Pythagoräer haben entdeckt, dass die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um alle Längenverhältnisse in geometrischen Figuren mittels Zahlen zu beschreiben oder – anders ausgedrückt – um bei vorgegebener Einheit jeder Länge eine Maßzahl zuzuordnen. Die so motivierte Einführung der *irrationalen Zahlen* lässt sich allerdings nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen. Sie geschieht, damit für gewisse geometrische und algebraische Probleme anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie existieren. Lehrkräften sollte bewusst sein, dass der nächstliegende algebraische Anlass zur Erweiterung der rationalen Zahlen, das Lösen neuer Gleichungstypen wie $x^2 = 2$, zunächst nur „recht wenige“ (aber immer noch abzählbar viele) neue Zahlen erfordern würde. Der zentrale Anlass zur Einführung *aller* (überabzählbar vielen) reellen Zahlen ist das *Stopfen der Lücken auf der Zahlengerade.* Er kommt aber erst in der Analysis in seiner vollen Breite zum Tragen (vgl. Danckwerts/Vogel in diesem Heft).

Bei einer Zahlbereichserweiterung bekommen die Zahlen ein „erweitertes Aufgabenspektrum“ und brauchen dazu „personelle Verstärkung“.

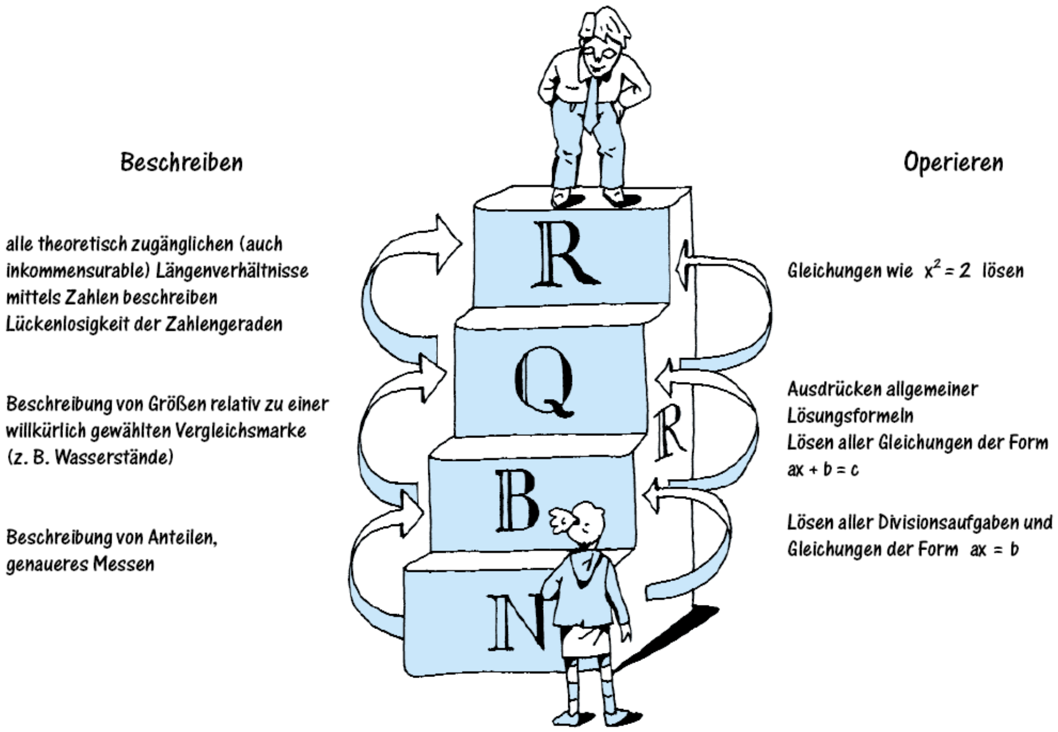

Abb. 1*: Zahlbereichstreppe: Anlässe für Zahlbereichserweiterungen*

Fazit: Wenn die Ansprüche an die Genauigkeit und Reichhaltigkeit der Beschreibungsmittel steigen, wobei die Motive von praktischen Anforderungen bis zur theoretischen Vollständigkeit reichen können, dann werden neue Zahlbereiche notwendig. Bei einer Zahlbereichserweiterung bekommen, alltagsweltlich gesprochen, die Zahlen ein „erweitertes Aufgabenspektrum“ und brauchen dazu „personelle Verstärkung“. Dieser sinnstiftende Grundgedanke sollte die unterrichtliche Einführung eines neuen Zahlbereichs als Leitvorstellung tragen.

2. Hürden bei den Zahlbereichserweiterungen

Kommen wir zurück zu Anton. Sein Satz „Wir rechnen jetzt auch mit Minuszahlen. Die sind eigentlich ganz okay, aber manchmal ziemlich komisch.“ zeugt von einer grundsätzlichen Akzeptanz für die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung. Die eigentlichen Herausforderungen beginnen für ihn und viele andere Lernende im Umgang mit den Zahlen und den zugehörigen Operationen.

Denn wer Zahlbereiche erweitert, kann sich nicht darauf verlassen, dass alle vertraut gewordenen Gewohnheiten beibehalten werden können. Subtraktion verkleinert – diese Erfahrung hat sich für die natürlichen Zahlen eingeprägt, aber die Subtraktion einer negativen Zahl bewirkt eine Vergrößerung. Eine Gleichung vom Typ (-5)-(-7)=2 kann zunächst jede Erwartung brüskieren: Wie können lauter Minuszeichen auf der linken Seite zu einem positiven Rechenergebnis auf der rechten Seite führen?

Auch für andere Zahlbereichserweiterungen zeigen sich Schwierigkeiten:

- Kann denn $\sqrt{2}$ als Zahlzeichen zulässig sein, das ist doch nur eine Aufforderung zum Ausrechnen?
- Wieso kann dieselbe Bruchzahl verschiedene Bruchdarstellungen haben, wo doch „normale“ Zahlen immer eindeutig dargestellt sind? Klara (7. Klasse) bilanzierte das für uns etwas resigniert so: „Ich glaube bei Brüchen ist vieles anders herum als bei natürlichen Zahlen.“ (vgl. Prediger 2004)

Von einem besonders augenfälligen Beispiel berichtet Swan 2001 (siehe *Abb. 2*). Gareths Verständnis der Multiplikation mit Dezimalbrüchen und seine vermutlich von den natürlichen Zahlen übernommene intuitive Regel, dass Multiplikation immer vergrößert, hindern ihn daran, die eigentlich vertraute Rechenoperation Multiplikation für die Lösung der Situation zu aktivieren. Obwohl Gareth die Situation inhaltlich durchdringt und mit Dreisatzüberlegungen sofort löst, kann er dieses Hindernis nicht eigenständig überwinden. Lieber misstraut er dem Taschenrechner, als seine intuitive Regel über die vergrößernde Multiplikation aufzugeben.

Die Szene zeugt von Irritationen des Augenblicks, in denen Bruchstücke neuen Wissens mit Konnotationen vertraut gewordener Gewohnheiten in ein widersprüchlich erscheinendes Gemenge treten, das erst wieder aufgelöst werden muss. Dass solche Irritationen eine der zentralen Fehlerquelle im Umgang mit neuen Zahlbereichen bilden, ist vielfach empirisch belegt (vgl. Bell et al. 1981, vom Hofe/Wartha 2004).

Hier ist die genauere Betrachtung insofern um so wichtiger, als es sich dabei nicht um individuelle Defizite der Lernenden handelt, sondern um Schwierigkeiten, die in der Stoffstruktur selbst begründet sind (vgl. Hefendehl-Hebeker 1989, Prediger 2004, 2006).

Wenn intuitive Regeln zur Multiplikation das adäquaten Rechnen behindern
- Gespräch mit Gareth, 9. Klasse (nach Swan 2001, S. 154):

Aufgabe: 1 kg eines Produkts kostet 1,50 €,
berechne die Kosten von 2,2 kg und 0,7 kg.

Gareth (berechnet mit Taschenrechner $1{,}5 \cdot 2{,}2 = 3{,}3$): Für das erste 3,30€.
(berechnet 1,5 : 0,7, erhält 2,14, und starrt erstaunt schweigend auf das Ergebnis): Hä?

Lehrer: Wieso hast Du beim ersten multipliziert und beim zweiten dividiert?

Gareth: Ist doch klar, die Antwort muss kleiner als 3,30 € sein, und eigentlich macht Teilen die 1,50 € kleiner. [...] Hm, eigentlich müsste 1,05 € rauskommen.

Lehrer: Woher weißt Du das?

Gareth: Hab ich ausgerechnet, mit Dreisatz. [...]

Aber keine Ahnung, wie man das mit dem Taschenrechner bekommt. […]

Vielleicht sind die Batterien schwach und der Taschenrechner spinnt?

Lehrer: Probier doch mal $1{,}5 \cdot 0{,}7$ und guck, was rauskommt.

Gareth: (rechnet) 1,05! Das hätte ich nie erwartet! Multiplizieren vergrößert doch!

Abb. 2*: Beispiel für Hürden bei den Dezimalbrüchen – Gespräch mit Gareth*

3. Notwendige Wandlungen der Zahl- und Operationsvorstellungen

Eine Zahlbereichserweiterung ist nämlich mehr als ein erweitertes Repertoire an Zahlsymbolen, Rechenregeln und Anwendungsmöglichkeiten. Sie führt in eine *veränderte Gedankenwelt*. Diese ist nicht losgelöst von der alten, vermittelt aber ungewohnte, zum Teil sogar irritierende Erfahrungen und erfordert manches Umdenken. Vertraute Vorstellungen und gewohnheitsmäßige Erwartungen müssen erweitert oder modifiziert werden.

Eine Zahlbereichserweiterung führt in eine veränderte Gedankenwelt.

Die Modifikationsnotwendigkeiten betreffen alle wesentlichen Aspekte, nach denen Zahlen charakterisiert werden: den Verwendungszweck (vgl. 1. Abschnitt), die Zahldarstellungen, das Ordnungsgefüge des Zahlbereichs und die Rechenoperationen. Einen ersten Überblick dazu gibt die Zusammenstellung in *Abb. 3*. Sie wird hier schlaglichtartig in den Bereichen erklärt, wo potentiell besondere Schwierigkeiten auftreten (für eine gründlichere Erläuterung vgl. Hefendehl-Hebeker 2006 in den Online-Ergänzungen).

Von den natürliche Zahlen zu den Bruchzahlen

Beim Übergang zu den Bruchzahlen ist ein gründlicher Wandel der Zahlvorstellung notwendig. Die Interpretation wird vielfältiger, denn mit Brüchen werden nicht nur Anzahlen und Ordnungszahlen, sondern Anteile, Verhältnisse, Verteilungssituationen u.v.m. beschrieben. Diese Vielfalt artikuliert sich auch in der Zahldarstellung. Während sich natürliche Zahlen durch Zahlzeichen im Stellenwertsystem eindeutig darstellen lassen, gibt es zur Darstellung von Brüchen ein verwirrendes Spektrum an Möglichkeiten. Um einen Bruch zu bezeichnen, benötigt man zwei ganze Zahlen (Zähler und Nenner), und jede Bruchzahl kann durch unendlich viele Brüche dargestellt werden, weil sie aus unendlich vielen verschiedenen Teilungs- und Messvorgängen resultieren kann. Außerdem lässt sich jeder Bruchzahl auch in Dezimalschreibweise darstellen.

Während die inhaltliche Interpretation (und damit verbunden die verständige Anwendung) von Addition und Subtraktion bei Bruchzahlen meist unproblematisch ist, fällt bei Multiplikation und Division zwar das rechnerische Ausführen meist leichter, doch zeigt Gareths Beispiel (in *Abb. 2*), dass der noch nicht vollzogene Wandel in der inhaltlichen Vorstellung (Multiplizieren von natürlichen Zahlen als fortgesetztes Hinzufügen) auch alte intuitiven Regeln („Multiplizieren vergrößert“) aktivieren kann.

Diese Regel aber behindert die angemessene Auswahl von Operationen für das Mathematisieren eines einfachen Zusammenhangs solange, bis andere inhaltliche Vorstellungen zur Multiplikation auch die neuen Ordnungseigenschaften der Multiplikation plausibel machen: Wer Multiplizieren von Brüchen deuten kann als das Bilden von Anteilen, wird auch seine intuitive Regel von der Wirkung der Multiplikation wandeln und einsehen, dass Multiplizieren nicht immer vergrößert. Dazu sollte der Zusammenhang zwischen „von“ und „mal“ verstanden und möglichst als konsistente Erweiterung der Vorstellung vom multiplikativen Vergleich begriffen werden: Das Dreifache der Zahl 17 kann man multiplikativ durch $17 \cdot 3$ beschreiben, und den dritten Teil ebenso multiplikativ durch $17 \cdot \frac{1}{3}$ (vgl. Prediger 2006, Greer 1994).

Analog klären sich die Irritationen bei der Division erst auf, wenn die Division durch einen Bruch inhaltlich als konsistente Fortsetzung des Einteilungsgedankens begriffen wird (z. B. eine Stecke von 5 cm in Teilstrecken zu je ½ cm einteilen).

Hier zeigt sich die Subtilität und subjektive Plausibilität von Schülervorstellungen, die wir in der Hektik des Unterrichtsalltags gar nicht immer leicht erfassen können. In dem Artikel zu Brüchen in diesem Heft werden daher diagnostische Aufgaben vorgeschlagen (vgl. Kopiervorlage), mit denen noch nicht gewandelte Vorstellungen und intuitive Regeln zu Brüchen und ihren Operationen erhoben werden können.

Negative Zahlen

Für den Übergang zu den *negativen Zahlen* sind die Schwierigkeiten anders gelagert: Beim Aufbau tragfähiger Vorstellungen ist es wichtig, dass negative Zahlen nicht einfach als positive Zahlen in spezieller Verwendung (z. B. als Schulden, die groß oder klein sein können) gesehen, sondern wirklich in ihrem Charakter als relative Zahlen bezüglich einer Vergleichsmarke verstanden werden. Dazu müssen Guthaben und Schulden dem Oberbegriff des Besitzstandes untergeordnet und auf einer gemeinsamen orientierten Skala angeordnet werden. Bei Zahlen zweier Qualitäten liegt sonst die Symmetrie der Zahlengeraden zum Nullpunkt eine spiegelbildliche Ordnungsrelation nahe, denn schließlich bezeichnen -4 Euro einen höheren Schuldenbetrag als -3 Euro. Die Relation „geringer" für Besitzstände passt zur einheitlichen Orientierung der Zahlengeraden von links nach rechts (oder von unten nach oben), und man hat sich aus gutem Grunde dafür entschieden, dass diese Orientierung für die Fortsetzung der Ordnungsrelation maßgeblich sein soll.

Die Addition und Subtraktion im Bereich der rationalen Zahlen ist in der Regel kein Problem, das Guthaben/Schulden-Modell leistet gute gedankliche Stützen, dies als gerichtetes Hinzufügen und Wegnehmen zu betrachten (vgl. Barzel/Eschweiler in diesem Heft). Gleichwohl irritieren Gleichungen wie (-5) - (-7) = 2. Die Wucht der Signale ist einfach zu groß, und es braucht eine Reihe weiterer vertrauensbildender Maßnahmen, um sich an die negativen Zahlen und ihre internen Gesetze zu gewöhnen (Hefendehl-Hebeker 1989).

Dagegen versagt bei Multiplikation und Division die einfache Anschauung. Die Operationen werden letztendlich nach dem Prinzip der Permanenz formaler Gesetze festgesetzt und können allenfalls durch Kunstgriffe anschaulich interpretiert werden. Um dies zu verstehen, müssen auch die Zahloperationen in einem erweiterten Horizont gedacht werden. Das geschieht so, dass sich anschauliche und formale Aspekte gegenseitig stützen. Aus der Rückschauperspektive des Verstandenen entsteht ein System von unvergleichlicher Kohärenz, für Lernende wie Anton (s.o.) sind es willkürlich erscheinende Setzungen, die ihm zunächst Schwierigkeiten bereiten.

Reelle Zahlen

Während die Rechenoperationen bei den *reellen Zahlen (*auf der in der Schule eingenommenen Exaktheitsstufe) keine neuen Schwierigkeiten bereiten, stellt sich hier die Zahldarstellung selbst als die größte Herausforderung dar: Eine Grundvorstellung für reelle Zahlen ergibt sich aus der Konstruktion der beliebig genauen Näherung. Dem entspricht auf der Darstellungsebene der Aspekt des nicht abbrechenden, nicht notwendig periodischen Dezimalbruchs (vgl. Barzel/Hefendehl in diesem Heft). Innerhalb des dezimalen Stellenwert-systems ist somit für die nicht rationalen reellen Zahlen keine exakte Darstellung mit endlich vielen Zeichen möglich. Die Zahlen können nur noch indirekt beschrieben werden, als gedachte Lösung einer algebraischen Gleichung, z. B. $x^2 = 2$, oder als Grenzwert einer Näherungsfolge wie $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, oder sie können durch ein Individuensymbol (einer Art Arbeitstitel) bezeichnet werden wie die Kreiszahl mit dem Buchstaben π. Der Ausdruck $\sqrt{2}$ ist somit keine Aufforderung mehr zum Ausrechnen, sondern eine „fertige" Zahldarstellung, auch das ist gewöhnungsbedürftig.

	Natürliche Zahlen	Bruchzahlen	Rationale Zahlen	Reelle Zahlen
Grund-vorstel-lungen zu den Zahlen	beschreiben in erster Linie Anzahlen, Ordnungszahlen, auch als Rechenzahlen verwendet	dienen zur Beschreibung von Anteilen eines Ganzen, Verteilsituationen, multiplikativen Vergleichen, relativen Anteilen, Verhältnissen	relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke	Grundvorstellungen ergeben sich aus Konstruktion der beliebig genauen Näherung globale Sicht: geschlossene Lücken auf der Zahlengerade
Zahldar-stellung	eindeutige Zuordnung eines Zahlzeichens im dezimalen Stellenwertsystem, basierend auf der Idee der Zehnerbündelung	Darstellung nicht eindeutig: eine Bruchzahl kann durch unendlich viele Brüche oder eine Dezimalzahl oder Prozentzahl dargestellt werden	Darstellung mit bekannten Zahlsymbolen und mit Vorzeichen 3 Bedeutungen des Minuszeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen	Darstellung irrationaler Zahlen als nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen im Stellenwertsystem keine exakte Darstellung mit endlich vielen Zeichen, nur indirekte Beschreibung
Ordnungs-relation	interpretiert als „weniger als“ (Anzahlen) bzw. „früher als“ (Ordnungszahlen) jede Zahl hat eindeutigen Nachfolger	Interpretation als „weniger als“ unproblematisch rechnerische Ausführung schwieriger als Interpretation kein eindeutiger Nachfolger, da Brüche dicht liegen	„weniger als“ ist neu deutungsbedürftig leitende Idee für Ordnungsrelation: Orientierung der Zahlengerade Symmetrie der Zahlengeraden versus Orientierung in Richtung der positiven Seite	Deutung der Ordnungsrelation keine neue Hürde Ordnungseigenschaft der Vollständigkeit ist zentraler Erweiterungsgrund und wird doch in der Mittelstufe kaum bemerkt
Grundvor-stellungen für Opera-tionen	Addition: Hinzufügen, Zusammenfügen Subtraktion: Wegnehmen, Vermindern Multiplikation: fortgesetztes Hinzufügen, kontinuierliches Skalieren, multiplikativer Vergleich Division: Verteilen, Einteilen	Addition und Subtraktion bleiben der Vorstellung nach gleich, der Einfachheit der Vorstellung entspricht keine vergleichbare Einfachheit der Durchführung Multiplikation und Division mit eingeschränkten und modifizierten Interpretationen, rechnerische Ausführung einfach neue Ordnungseigenschaften für Multiplikation/Division	Verständnishürde: Operationen werden nach Prinzip der Permanenz formaler Gesetze festgesetzt, so dass möglichst viele Regeln (z. B. Distributivität, ...) bleiben Interpretation ist Permanenz der formalen Gesetze nachgeordnet! modifizierte Interpretationen für Addition/Subtraktion, Multiplikation nur mit Hilfsinterpretation als gerichtetes Skalieren	keine neuen Grundvorstellungen nötig Da Unterricht selten zu grundlegenden Fragen vordringt (etwa: wie addiert man nicht abbrechende Dezimalzahlen?), werden hier selten Probleme erlebt.

Abb. 3*: Übersicht zu Kontinuitäten und Diskontinuitäten in den Vorstellungen zu Zahlen und Operationen*

4. Konsequenzen für den Unterricht

Wie lässt sich mit den beschriebenen Herausforderungen nun im Unterricht umgehen? Wir verfolgen dazu vor allem drei didaktischen Leitideen (vgl. *Abb. 4*).

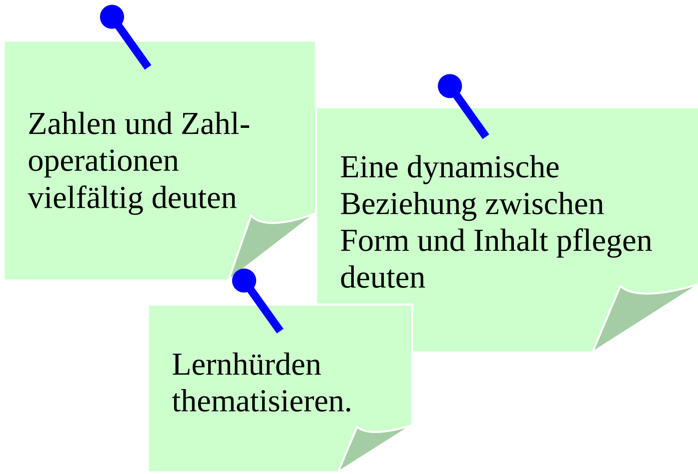

***Abb. 4**: Didaktische Leitideen zur Initiierung des Wandels von Zahlvorstellungen*

Eine dynamische Beziehung zwischen Form und Inhalt pflegen

Formeln in der Mathematik dienen dazu, Zusammenhänge und Verfahren präzise und allgemein darzustellen und der symbolischen Manipulation zugänglich zu machen, um auf diese Weise das Denken zu entlasten. Sie sollten aber im Unterricht aus einer verständnisvollen Erschließung des Themas erwachsen und diese keinesfalls ersetzen.

Die Formel für die Multiplikation von Brüchen („Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner") ist einprägsam. Wird sie aber ohne begleitendes inhaltliches Verständnis verwendet, dann sind die oben geschilderten Irritationen vorprogrammiert.

Wenn das Addieren von Brüchen nur schematisch trainiert wird (Hauptnenner suchen usw.), dann bleibt es fehleranfällig und wird von manchen Schülerinnen und Schülern auch als undurchsichtige Schwierigkeit erlebt, wenn nicht gar als Heimtücke der Betreiber des Faches: Warum kann man nicht wie bei der Multiplikation einfach Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner rechnen?

Auf einer fortgeschrittenen Stufe kann eine Thematisierung des Zusammenspiels von Form und Inhalt das Bewusstsein von der inneren Kohärenz der Mathematik und von der Ökonomie formaler Methoden stärken. Zwei Beispiele, über die sich das gemeinsame Wundern lohnt:

- *Die Subtraktion im Bereich der rationalen bzw. reellen Zahlen ist gerade so angelegt, das man überall auf der Zahlengeraden den gerichteten Abstand zwischen zwei Zahlenmarken durch einfache Subtraktion ermitteln kann. Ist das nicht praktisch gemacht?*
- *Dies hat zur Folge, dass im cartesischen Koordinatensystem die Steigung der Verbindungsgeraden zwischen zwei Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ durch den Quotienten $(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$ unabhängig von der gewählten Reihenfolge der Punkte dargestellt werden kann. Stellt Euch vor, wie kompliziert das Umgehen mit Steigungen sonst wäre!*

Das Zusammenspiel von Form und Inhalt zu reflektieren, dient also zwei Zielen zugleich: Auf der unmittelbaren Erarbeitungsebene vertieft es das Verständnis der zu erlernenden Zusammenhänge und Verfahren (s. unten und die Beiträge in diesem Heft), auf einer darüber liegenden Reflexionsebene kann es einen Eindruck von spezifischen Arbeitsweisen des Faches vermitteln.

Zahlen und Zahloperationen vielfältig deuten

Zahlen und Zahloperationen können sehr *unterschiedliche* Zusammenhänge beschreiben, Lernende sollten diese Erfahrung etwa unter dem Motto „Zahlen haben viele Gesichter" auf jeder Stufe der Zahlbereichserweiterungen immer wieder machen.

Gerade für die Brüche sind dazu in den letzten Jahren vielfältige Vorschläge gemacht worden (z. B. Malle 2004, Hefendehl-Hebeker 1996, vgl. auch Prediger in diesem Heft). Für die negativen Zahlen zeigen Barzel und Eschweiler in ihrem Artikel, wie tragfähige Modelle aufgebaut werden können durch Beschäftigung mit geeigneten außermathematischen

Kontexten und Spielen als formale Systeme. Wie ein Verständnis für irrationale Zahlen konsequent aus intensiven innermathematischen Betrachtungen erwachsen kann, zeigen Barzel und Hefendehl an einem Stationenzirkel zu irrationalen Zahlen in diesem Heft.

Nicht nur die Zahlen selbst, sondern auch das Umgehen mit Zahlen muss in den verschiedenen Modellen gedeutet werden, denn die inhaltliche Deutung der Operationen ist keineswegs mit dem Aufbau einer Zahlvorstellung selbst abgeschlossen. Ein Beispiel (vgl. Prediger in diesem Heft):

Das Erweitern von 2/3 zu 4/6 lässt sich deuten als Verfeinerung der Anteile eines Ganzen, aber was bedeutet die Gleichwertigkeit beider Brüche im Zusammenhang mit Pizza-Verteilsituationen? 2/3 steht dann für die Situation, dass 2 Pizzen auf 3 Kinder verteilt werden. 2/3 = 4/6 bedeutet hier, dass in beiden Fällen die Kinder dieselbe Menge Pizza bekommen - ob man zwei Pizzen auf drei Kinder oder vier Pizzen auf sechs Kinder verteilt.

Wer solche inhaltlichen Vorstellungen flexibel aufgebaut hat, muss sich nicht mehr wundern, dass Brüche nicht eindeutig darstellbar sind.

Lernhürden explizit thematisieren

Der Aufbau und die Gegenüberstellung vielfältiger Deutungen der „neuen Zahlen“ und Zahloperationen liefern das verständnisorientierte Fundament, auf dem die Überwindung der Hürden im Lernprozess besser gelingen kann. Darüber hinaus zeigt die Erfahrung ebenso wie aktuelle lerntheoretische Positionen, dass es sich lohnt, die potentiellen Hürden nicht durch didaktische Kniffe zu umschiffen, sondern gezielt im Lernprozess zu thematisieren (Prediger 2004).

Wer z. B. im Unterricht der Auseinandersetzung um die schwierige Frage Raum gibt, wie minus mal minus definiert werden soll, wird die Überlegungen der Mathematiker am Ende besser würdigen:

Was handeln wir uns denn beim Rechnen ein, wenn wir sagen würden, minus mal minus gibt minus?

Wenn eine Schülerin sich intensiv mit der Unmöglichkeit befasst hat, $\sqrt{2}$ mit endlich vielen Zeichen als Dezimalzahlen hinzuschreiben, wird sie $\sqrt{2}$ eher als Schreibweise statt als Handlungsaufforderung akzeptieren:

Okay, ich verstehe, dass Dir $\sqrt{2}$ *als Zahlschreibweise nicht gefällt. Dann suche eine andere Schreibweise, aber eine exakte!*

Irritierende Aspekte im Übergang zu neuen Zahlbereichen sollten jedoch nicht nur ausführlich erlebt, sondern auch auf ihre Ursachen hin untersucht werden, z. B. so:

Wie stelle ich mir Multiplizieren vor, so dass ich denke, es vergrößert immer? (Vermutlich als fortgesetztes Addieren). Wieso ist das für Brüche nicht mehr sinnvoll? Welche Interpretation für das Multiplizieren von Brüchen ist denn sonst sinnvoll? (z. B. multiplikative Vergleiche) Ist dann klar, wieso Multiplizieren auch verkleinern kann? (Ja!)

Die über dieses Beispiel hinaus gehende Frage lautet also:

Was muss ich anders denken als bisher, um mich über dieses Phänomen nicht wundern zu müssen?

Abb.5 zeigt ein Beispiel für die negativen Zahlen, in der sowohl die Ursache des Verwunderns expliziert werden soll, als auch mögliche anschauliche Erläuterungen gegeben werden (ähnliche Aufgaben für Brüche in Prediger 2004).

***Abb. 5**: Über (-5)-(-7)=2 muss man sich doch nicht wundern! Beispielaufgabe*

Fazit

Aus der Rückschauperspektive des Verstandenen ist das Zahlensystem ein Gebäude von höchster architektonischer Perfektion. Wer das Gebäude jedoch nachbauen will, muss zunächst mit vielerlei Einsturzgefahren kämpfen. Nicht zuletzt die gewohnten Vorstellungen und Regeln der vertrauten Zahlbereiche erweisen sich dabei zum Teil als Hürden, die im Lernprozess überwunden werden müssen.

Einige Anregungen, dies ernst zu nehmen und im Unterricht zu initiieren, will dieses Heft geben. Viel Spaß beim weiteren Lesen!

Aus der Rückschauperspektive ist das Zahlensystem ein Gebäude von höchster architektonischer Perfektion. Wer es jedoch nachbauen will, muss mit vielerlei Einsturzgefahren kämpfen.

Literatur

Bell, Alan / Swan, Malcolm / Taylor, Gwen M. (1981): Choice of operation in verbal problems with decimal numbers, in: Educational Studies in Mathematics 12, S. 399-420.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1989): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte, in: Mathematik lehren 35, S.6-12.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1996): Brüche haben viele Gesichter, in: Mathematik lehren 78, S.20-48.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2006): Zahlbereichserweiterungen als neue Gedankenwelten – fachliche Klärungen, online unter http://www.aulis.de/zeitschriften/math

Malle, Günther (2004) (Hrsg.): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen, in: Mathematik lehren 123.

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?, in: Mathematik lehren 123, S. 10-13.

Prediger, Susanne (2006, im Druck): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change. Revisiting the case of multiplication of fractions, erscheint in Learning and Instruction.

Swan, Malcolm (2001): Dealing with misconceptions in mathematics, in: Gates, Peter (Hrsg.): Issues in mathematics teaching, Routledge Falmer, London, S. 147-165.

vom Hofe, Rudolf / Wartha, Sebastian (2004): Grundvorstellungsumbrüche als Erklärungsmodell für die Fehleranfälligkeit in der Zahlbegriffsentwicklung, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim, S. 593-596.

Adresse der Autorinnen

Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
Universität Duisburg-Essen
lisa.hefendehl@uni-due.de

Prof. Dr. Susanne Prediger
Universität Dortmund, IEEM
prediger@math.uni-dortmund.de