

Was bedeutet Denken in Funktionen und wie kann es gefördert werden? Wozu müssen verschiedene Grundvorstellungen und Darstellungsformen verfügbar sein? Welche Tätigkeiten sind im Zusammenhang mit Funktion von Bedeutung? Der Einführungsartikel fasst wichtige Aspekte der didaktischen Diskussion um Funktionen zusammen und gibt Anregungen für eine verständnisorientierte Behandlung im Unterricht.

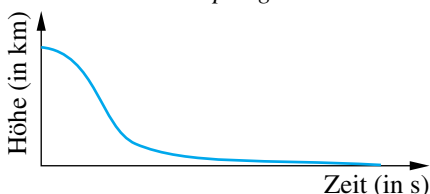
Funktioniert's? – Denken in Funktionen

Timo Leuders und Susanne Prediger

Manchmal funktioniert's halt nicht, aber wieso?

Stellen Sie sich vor, Sie haben am Ende der Klasse 10 erfolgreich alle Funktionstypen im Unterricht behandelt, die Sie sich vorgenommen haben. Ihre Klasse hat in den Klassenarbeiten zu linearen und quadratischen Funktionen und zuletzt zu den Exponentialfunktionen insgesamt zufrieden stellende Leistungen gezeigt. Nun möchten Sie einmal gegen Ende des Jahres eine interessante Anwendung behandeln, bei der Schülerinnen und Schüler ih-

Abb. 1: Fallschirmspringen



re erworbenen Kenntnisse zu Funktionen einsetzen können. Sie präsentieren also eine Graphik wie die in *Abbildung 1* abgedruckte und diskutieren mit der Klasse, was sich hieraus ablesen lässt.

Dabei vernehmen Sie Äußerungen wie die folgenden:

„Der nimmt Anlauf und springt erst ganz waagrecht ab“ – „Nee, das liegt daran, dass das Flugzeug nach rechts fliegt, wenn er heraus springt.“

„Das kann irgendwie nicht sein! Der müsste doch eher senkrecht landen, oder ist das so ein Gleitfallschirm?“

Was ist hier passiert? Wieso scheinen die Schüler einfache Zusammenhänge nicht aus einem Graphen ablesen zu können, obwohl sie bereits geschickt mit Parametern von exponentiellen Funktionstermen umgehen können? Wieso können sie sich nichts unter der Abbildung vorstellen?

Warum verfallen sie in derartige Fehldeutungen? Hier muss man offensichtlich tiefer graben als nur nach den technischen Fertigkeiten. Welchen Funktionsbegriff haben die Schüler eigentlich? Was ist eine „Funktion“ für sie?

Diese grundsätzlichen Schwierigkeiten beim Umgang mit Funktionen (nicht nur in ihrer Darstellung als Funktionsgraph) sind nichts Ungewöhnliches, wie wir spätestens seit der PISA-Studie wissen. Die Schwierigkeiten liegen aber nicht an unüberwindlichen psychologischen Barrieren, sondern sind auch ein Produkt unseres Mathematikunterrichts, darauf deuten die sehr unterschiedlichen Lösungshäufigkeiten in den einzelnen Ländern bei funktionsbezogenen PISA-Aufgaben hin (siehe *Kasten 1*).

Was ist überhaupt eine Funktion?

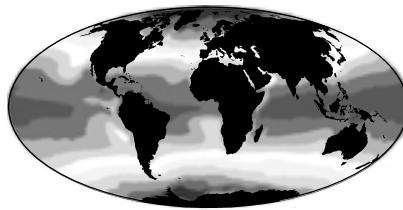
Sie mögen bitte diese (scheinbar) triviale Frage verzeihen. Vielleicht treten Sie für einen Moment vom täglichen Geschäft eines Mathematik Lehrenden zurück und betrachten die Frage mit dem Blick eines Menschen, der mit Mathematik nach seiner Schulzeit nur wenig zu tun hatte. Dann erkennt man nämlich, wie schillernd und vielgestaltig der Begriff ist. Die *Funktion* einer Maschine ist der Zweck ihrer Konstruktion. Wenn eine Sache *funktioniert*, erfüllt sie ihren Zweck, sie läuft rund, alles greift sinnvoll ineinander, Probleme sind gelöst, Fragen beantwortet. In letzter Zeit hört man oft von *funktionaler Bil-*

Situationen, die sich funktional beschreiben lassen

Temperaturkarte

Für jeden Ort auf der Weltkugel gibt es einen Längen- und Breitengrad, zu jedem Zeitpunkt lässt sich an diesem Ort eine eindeutige Temperatur feststellen (zumindest im Prinzip).

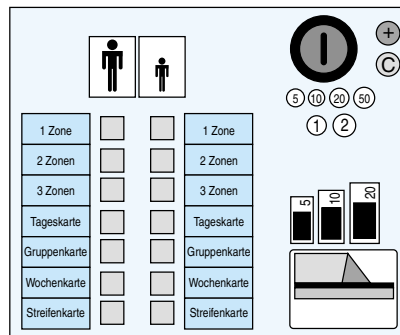
Zuordnungsvorstellung



Fahrkartenkauf

Am Fahrkartenautomat erhält man für jede Tastenkombination eine bestimmte Fahrkarte (auch wenn für den Benutzer nicht immer klar ist, welche ...).

Zuordnungsvorstellung



Einkauf

Der Preis einer Ware ist abhängig von der Menge, und es gilt: Je größer die Menge, desto höher der Preis. (Bei näherem Hinsehen ist dieser Zusammenhang aber nicht unbedingt proportional ...)

Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung



Höhenmessung

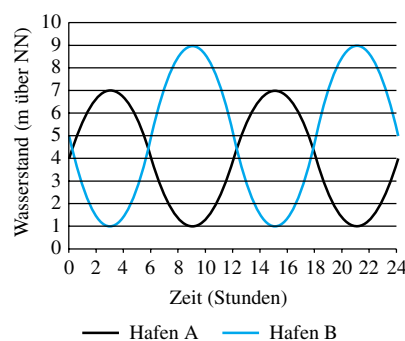
Temperatur und Luftdruck in den Bergen hängen mit der Höhe zusammen, auf der man sich befindet. Das wird zur Höhenmessung benutzt.

Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung



Gezeitenabfolge

Der Verlauf von Ebbe und Flut zeigt ein charakteristisches, periodisches Muster. Wenn man es vereinfacht darstellt, sieht es aus wie in nebenstehender Abbildung *Funktion als Ganzes*, aber auch *Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung*



spektive der Zuordnung tritt hier die spezifische Dynamik einer Veränderung hinzu, z. B. in Äußerungen wie „je größer die Menge, desto höher der Preis“.

3 **Vorstellung von der Funktion als Ganzes:** Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes, wie etwa das spezifische Muster in der Gezeitenabfolge. So wird ein Gesamtphänomen erfasst, und die Funktion tritt uns als eigenständiges Objekt entgegen, etwa als charakteristischer Graph oder symbolisch als Term oder Funktionsname.

Schülerinnen und Schüler zu einem *Denken in Funktionen* zu führen, bedeutet, sie zu befähigen, in unterschiedlichen Situationen Zusammenhänge funktional zu erfassen, mit informellen und auch formaleren Mitteln zu beschreiben, und mit Hilfe dieser Mittel Probleme zu lösen. Dazu müssen Lernende die beschriebenen Grundvorstellungen aufbauen, denn sie stellen die Bindeglieder zwischen der realen Situation und dem mathematischen Funktionsbegriff dar (vom Hofe 2003).

Die verschiedenen Grundvorstellungen erlauben uns unterschiedliche Sichtweisen auf Situationen und bieten so jeweils die Grundlage für ihre mathematische Beschreibung und Behandlung.

Dass die hier genannten Grundvorstellungen nicht streng voneinander getrennt werden können, sondern aufeinander aufbauen, zeigt das folgende Beispiel: Wer bei Betrachtung eines exponentiellen Wachstumsprozesses über den Zuordnungsaspekt verfügt, kann beispielsweise Werte aus Graphen ablesen oder aus einem gegebenen Funktionsterm berechnen und Fragen beantworten wie „Wann wird die Bevölkerung auf das Doppelte angestiegen sein?“. Aber erst, wenn man über die Kovariationsvorstellung verfügt, kann man die gemeinsame Veränderung der beiden Größen „Zeit“ und „Anzahl“ sehen und mathematisch beschreiben: „In gleichen Zeiten wächst die Zahl immer um denselben Prozentsatz“. Wer dieses gemeinsame Änderungsverhalten so charakterisieren kann, identifiziert daran das allgemeine, charakteristische Muster exponentieller Funktionen und kann mit anderen Wachstumsprozessen vergleichen. Er nimmt dabei bereits die Funktion als Ganzes in den Blick. Wie eng die drei

Grundvorstellungen beim problembezogenen Denken in Funktionen miteinander vernetzt sind, zeigt auch das Beispiel in *Kasten 3*.

Für die Gestaltung von Lernprozessen zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen ist es wichtig, sich bewusst zu machen, dass der Name „Grund“-Vorstellung auf ihre grundlegende Bedeutung für die Aktivierung und Interpretation des Funktionsbegriffs in realen Situationen hinweist. Er bedeutet dagegen nicht, dass sie bei allen Lernenden sowieso natürlich vorhanden sind, im Gegenteil: Die Vorstellungen, mit denen Schülerinnen und Schüler sich funktionalen Zusammenhängen nähern, sind höchst individuell und entsprechen durchaus nicht immer den hier beschriebenen Grundvorstellungen. Lernende dabei zu unterstützen, ihre individuellen Vorstellungen zu mathematischen Grundvorstellungen weiterzuentwickeln, ist Aufgabe des schulischen Umgangs mit Funktionen. Dabei müssen die individuellen Denkweisen von Schülerinnen und Schülern im Unterricht zu Wort kommen, denn sie sind Ausgangspunkt für die Entwicklung eines reichhaltigen und nutzbringenden Funktionsbegriffs. Katja Lengnink zeigt in ihrem Bei-

trag im Thementeil dieses Heftes einen möglichen Weg für den Aspekt der funktionalen Abhängigkeit zwischen Größen auf, Steffen Hahn bereitet den Weg für ein ähnliches Vorgehen im Thema Kurvendiskussion.

Die verschiedenen Gesichter einer Funktion

Wenn man hinreichend viel mit Funktionen gearbeitet hat, gewinnen sie ein Eigenleben, sie sind nicht mehr nur Abbilder oder Modelle von Beziehungen und Veränderungsprozessen in der Umwelt, sondern auch eigenständige Objekte, mit denen man umgehen kann. Dieser Abstraktionsvorgang ist typisch für die Mathematik, ja eigentlich sogar die Vorgehensweise mathematischer Begriffsbildung schlechthin.

Entscheidend für den mathematischen Umgang mit funktional beschriebenen Zusammenhängen ist die Möglichkeit, sie auf vielfältige Weise darzustellen: Als verbale Beschreibung, numerisch als Tabelle, graphisch als Diagramm oder Graph und schließlich rein symbolisch als Term (s. *Abbildung 2 und 4*, vgl. auch Herget/Malitte/Richter 2000).

Wer verschiedene Darstellungen verwenden


det, muss auch zwischen ihnen wechseln können. Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge erfordert eine Vielzahl mathematischer Tätigkeiten, die in *Abbildung 3* zusammengestellt sind (in Anlehnung an Swan u. a. 1985).

Erst die Kenntnis dieser verschiedenen Gesichter und die Kompetenz, zwischen ihnen hin und her zu wechseln, zeugen von einem Verständnis von Funktionen und führen zu einem flexiblen Umgang mit ihnen. Es lohnt sich, auch mit Lernenden über die Frage zu reden, wieso man überhaupt zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln will (vgl. Prediger 2003). Die Antwort von Lernenden nach einiger Diskussion:

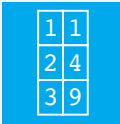
„Weil man in den jeweiligen Darstellungen unterschiedliches gut machen kann: Für einen groben Überblick oder das näherungsweise Finden einer Nullstelle ist der Graph gut, für Prognosen ein Funktionsterm praktisch, und die Gleichmäßigkeit eines Wachstumsprozesses sehen wir am schönsten an einer Tabelle.“

Herausarbeiten lässt sich so die in der Mathematik so fundamentale Idee des Beschreibungswechsels und ihr Potential für Problemlösungen (vgl. auch den Beitrag

Abb. 2: Die verschiedenen Gesichter von Funktionen

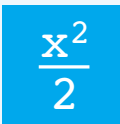


Als verbale Beschreibung:
„Die Kosten für das Projekt steigen mit laufender Zeit exponentiell.“
„Der Preis einer Ware ist nicht ganz proportional zur Menge.“



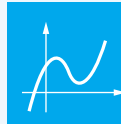
Numerisch als Tabelle

Ifd. Nr.	zu versteuerndes Einkommen in EUR		Einkommensteuer in EUR
	von	bis	
1	0	7.235	0
2	7.226	7.271	10
3	7.272	7.307	17
4	7.308	7.343	25
5	7.344	7.379	32
6	7.380	7.415	39
7	7.416	7.451	46



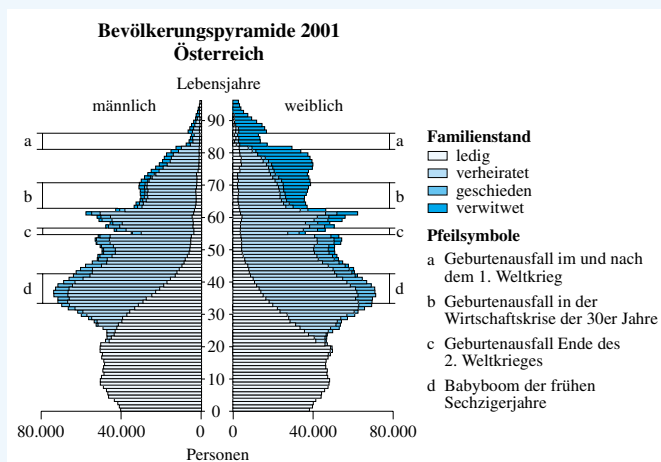
Symbolisch als Term

$$\frac{x^2}{2}$$

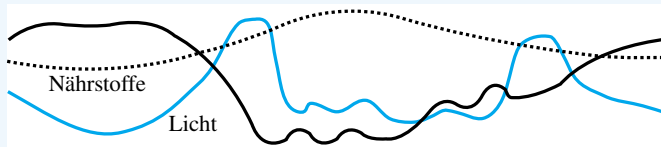


Als Diagramm oder Graph

Bevölkerungspyramide 2001 Österreich



Personen



Nährstoffe
Licht

Problemlösen durch Vernetzung von Grundvorstellungen an einer PISA-Beispielaufgabe

Aufgabe aus PISA 2000:

Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzas mit derselben Dicke in verschiedenen Größen an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30 cm und kostet 30 Zeds. Die größere hat einen Durchmesser von 40 cm und kostet 40 Zeds.

Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld? Gib eine Begründung an.



Natürlich lässt sich die Aufgabe durch Ausrechnen der Flächeninhalte und Dreisatzbetrachtungen lösen. Mathematisch Geschulte sehen aber sofort auch einen eleganteren Lösungsweg durch Denken in Funktion: Der Preis steigt linear, der Flächeninhalt quadratisch, also ist die größere Pizza preiswerter. Dieser Lösungsweg gibt einem zwar keine genauen Angaben, ist aber stabiler gegen Rechenfehler und liefert auch Gründe für die Lösung. Wer diese Argumentation routiniert benutzt, macht sich nicht mehr klar, welche hohe Flexibilität im Umgang mit verschiedenen Grundvorstellungen nötig ist, wie viele Wechsel in der Sichtweise auf die gleiche Situation wir vollziehen, um diese Überlegung anzustellen. Um mögliche Schwierigkeiten von Lernenden in der Erstbegegnung mit solch einer Argumentation zu verstehen, sollen die notwendigen Vernetzungen von Grundvorstellungen hier durch eine ausführliche Version explizit gemacht werden:

Überlegung

Die zu untersuchende Beziehungen sind die zwischen dem Durchmesser der Pizza, der Menge der Pizza und ihrem Preis.

Dazu vergleicht man den Zusammenhang von Durchmesser und Flächeninhalt (als Modellierung der Menge) mit der Zuordnung des Preises zum Durchmesser.

Die Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Durchmesser lässt sich durch eine quadratische Formel beschreiben, denn es gilt

$$F = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Preis und Durchmesser wachsen gleich, die Zuordnung des Preises zum Durchmesser ist also proportional angelegt.

Wir wissen, dass quadratische Funktionen (fast überall) schneller wachsen als lineare.

Also steigt der Flächeninhalt schneller als der Preis.

Daher muss die größere Pizza im Verhältnis zum Flächeninhalt preiswerter sein als die kleinere, d. h. bei der großen Pizza bekommt man mehr für sein Geld.

Welche Grundvorstellung wird aktiviert?

Zuordnungsvorstellung: zwei Funktionen werden spezifiziert:

Mengenfunktion: Durchmesser \rightarrow Flächeninhalt (die muss man während der Lösung als relevant erkennen und selbst spezifizieren)

Preisfunktion: Durchmesser \rightarrow Preis (die wird durch die Aufgabe bereits spezifiziert)

Identifizieren eines Funktionstyps in der Zuordnungsvorstellung (Formel wird als Termdarstellung einer Funktion interpretiert)

Identifizieren des Funktionstyps der Mengenfunktion im *Kovariationsvorstellung* (Tabellendarstellung):

	Durchmesser	Preis	
$\cdot \frac{4}{3}$	30 cm	30 zeds	$\cdot \frac{4}{3}$
	40 cm	40 zeds	

gleicher Zuwachs, also proportional

Funktion als Ganzes: Wissen über charakteristische Wachstumseigenschaften linearer und quadratischer Funktionen.

Rückschluss auf *Kovariation*

Rückschluss auf *Zuordnung* an Stelle $x = 40$ cm

	Situationen (Bilder und Texte)	Tabellen	Graphen	Terme
Situationen (Bilder und Texte)		Werte finden	skizzieren	algebraisch beschreiben
Tabellen	lesen		Punkte einzeichnen	annähern (z. B. lineare Regression)
Graphen	interpretieren	ablesen		annähern (Kurven hindurchlegen)
Terme	Variablen interpretieren	berechnen	skizzieren	

Abb. 3: Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel

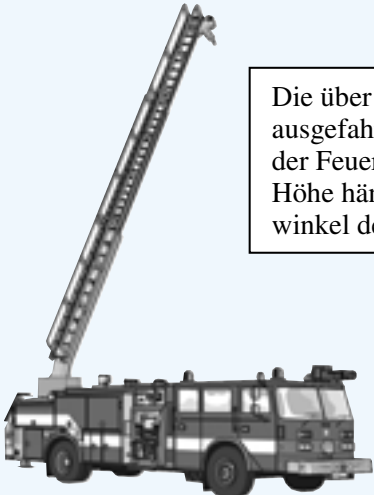
von Bärbel Barzel u. a. im Thementeil dieses Heftes). Offenbar beschränken sich die Kompetenzen, die beim Darstellungswechsel benö-

tigt werden, nicht auf das Zuordnen von linearen und quadratischen Graphen und Termen, wie es oft in großer Breite in Schulbüchern geübt wird. Geht man im

Unterricht zu schnell zu der symbolischen Behandlung einiger durch einen geschlossenen Term darstellbarer Funktionstypen über, so riskiert man, dass fundamentale Kompetenzen des Lesens, Interpretierens und Modellierens nicht ausgebildet werden. Der Umgang von Schülerinnen und Schülern mit Funktionen bleibt dann schematisch und wird nicht nachhaltig behalten und genutzt.


Will man die reichhaltigen Aspekte und Eigenschaften von Funktionen mit Lernenden erkunden, so ist es kontraproduktiv, sich vornehmlich mit den elementar algebraisch beschreibbaren Funktionen zu befassen. Wer Denken in Funktionen für realistische Situationen schulen will, stößt dagegen oft auch auf nur numerisch oder graphisch-qualitativ gegebene Funktionen, die sich durch einfache Terme nicht beschreiben lassen. Da dieser Ansatz in der heutigen Praxis oft zu kurz kommt, möchten wir ihn in den Beiträgen dieses Heftes, insbesondere dem von Walter Af-folter besonders betonen. Steffen Hahn zeigt, wie sich die qualitative Beschäftigung mit Funktionen auch in Klasse 11 fruchtbar machen lässt.

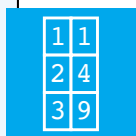
Abb. 4: Darstellungswechsel für den Zusammenhang zwischen Höhe und Anstellwinkel der Feuerwehrleiter

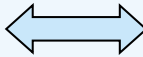



Die über eine vollständig ausgefahrene Drehleiter der Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel der Leiter ab.

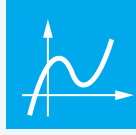
Winkel α [in Grad]	Höhe h [in m]
50	38,3
60	51,9
70	65,8
80	78,8




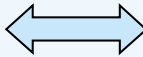




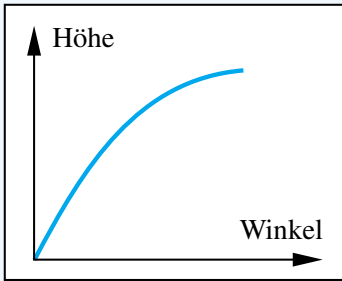








$\alpha \mapsto 35 \cdot \sin \alpha$



„Wenn ich auf der linken Seite der Rechnung jede Zahl um 1 erhöhe, was passiert dann mit dem Ergebnis? Und warum?“

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$$

$$4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 7$$

$$5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 9$$

...

Abb. 5: Funktionales Denken vor dem Funktionsbegriff – Beispielaufgabe

Denken in Funktionen beginnt vor Einführung der Funktionsdefinition

Die formale mathematische Definition einer Funktion ist zwar aus mathematischer Sicht ausgesprochen galant, doch fasst sie keinesfalls intuitiv den Kern des Funktionsbegriffs, wie er für Schulmathematik relevant ist. Man muss nicht allzu tief in die Geschichte des Funktionsbegriffs einsteigen, um zu begreifen, dass er das Endprodukt eines Jahrhunderts währenden und mühsamen Exaktifizierungsprozesses darstellt (vgl. Hischer 2002, Malle 1996).

Den fertigen Begriff zu Beginn des Lernprozesses „einzuführen“, stellt nicht nur die Geschichte auf den Kopf, sondern erkennt auch, dass zum es Lernen dazu gehört, eigene Erfahrungen zu machen und Vorstellungen aktiv zu konstruieren. Fertige Mathematik allein ist also nicht unbedingt geeignet für Novizen.

Wer jetzt aber fordert, man müsse akribisch den gesamten verschlungenen Denkweg unserer mathematischen Ahnen nachverfolgen (das wäre die überstrenge Auslegung des so genannten historisch-genetischen Prinzips), liegt falsch. Schülerinnen und Schüler können durchaus mit einem

reichhaltigen Satz von Beispielen für sich entdecken, wie man funktional beschreibbare Zusammenhänge auf verschiedene Weise erfassen und darstellen kann. Die mathematische Definition einer Funktion steht dann am Ende einer solchen ausführlichen Entdeckungsreise durch das Reich der Funktionen, wie die Beiträge im Thementeil dieses Heftes illustrieren.

Das angestrebte Denken in Funktionen kann dabei noch weit vor der systematischen Einführung des Funktionsbegriffs beginnen:

- Funktionale Zusammenhänge sind erlebbar im Umgang mit Maßstäben und Größenvergleichen in Klasse 5 und in dynamischen Sichten auf geometrische Probleme (vgl. Krüger 2001).
- Vorerfahrungen mit Graphen und Tabellen werden unter Zuordnungsaspekten bereits in der Grundschule gesammelt.
- Produktive Rechenaufgaben geben Anlässe zum Entdecken arithmetischer Zusammenhänge, die bereits die Kovariationsperspektive einnehmen (vgl. *Abbildung 5*).

Die didaktischen Leitideen zum Aufbau eines hier beschriebenen Denkens in Funktionen haben wir in *Kasten 4* noch

Kasten 4

Didaktische Leitideen zum Umgang mit Funktionen in der Schule

- **Vielfältige Grundvorstellungen** aufbauen und verknüpfen
- Früh anfangen – Gelegenheiten für das Erfahren von Abhängigkeit und Kovariation bieten sich schon **von Beginn der Grundschule an**.
- Funktionen in der Sekundarstufe I als Beschreibungsmittel für reale Zusammenhänge erfahrbar machen (man könnte dies den „**Primat des Modellierungsaspekts**“ nennen).
- Bei der Entwicklung von Lerngelegenheiten das **Verstehen vor den Kalkül** setzen. Hierzu kann vor allem das Betrachten reichhaltiger qualitativer Zusammenhänge dienen.
- Durchgehend **verschiedene Darstellungsformen** von Funktionen nutzen und den Wechsel zwischen Beispielen als produktiv erlebbar machen.
- Funktionales Verständnis **vernetzen mit Alltagsverständnis**, aber auch Abgrenzungen vornehmen.

einmal zusammengefasst. Wir hoffen, dass die Beiträge im Thementeil dieses Heftes für einen solchen Umgang mit Funktionen einige Anregungen für den eigenen Unterricht bieten.

Literatur

- Malle, G. (1996): Aus der Geschichte lernen, *Mathematik lehren* 75, 4–8.
- Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation, *Mathematik lehren* 103, 8–11.
- Herget, W./Malitte, E./Richter, K. (2000): Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht, in: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*, Volk und Wissen, Berlin, 115–124.
- Hischer, H. (2002): Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Vortragsmanuskript, Universität des Saarlandes, <http://hischer.de/uds/forsch/vortrag/hischer/ringv102/funkbegr.pdf>.
- Krüger, K. (2001): Funktionales Denken „alte“ Ideen und „neue“ Medien. In: Herget, Sommer, Weigand, Weth (Hrsg.): *Medien verbreiten Mathematik*. Franzbecker, Hildesheim.
- Prediger, S. (2003): Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts. In: *Friedrich Jahresheft XXI: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln*, 93–95.
- Swan, M. u. a. (1985): *The language of functions and graphs*, Shell Centre and Joint Matriculation Board, Nottingham.
- Vollrath, H. J. (1989): Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* 10, 3–37, online unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~vollrath/papers/052.pdf>.
- vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, *Mathematik lehren* 118, 4–8.

Susanne Prediger,
Universität Bremen,
prediger@math.uni-bremen.de

Timo Leuders,
Pädagogische Hochschule Freiburg,
leuders@ph-freiburg.de