

Geometrisches Konstruieren - Unterschiedliche Zugänge am Beispiel eines gotischen Kirchenfensters erfahrbar machen

Susanne Prediger & Karen Schnoor, Universität Bremen

Gekürzte Version erschienen in: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 57 (2005) 2, S. 79-84.

Das Zurückgreifen auf Dynamische Geometriesoftware (DGS) kann den Geometrieunterricht spürbar verändern, das haben viele Beispiele inzwischen gezeigt (einen zusammenfassenden Überblick geben z.B. Weigand/Weth 2002, Hischer 1998). Speziell für *geometrische Konstruktionsprobleme* haben wir mit dem neuen Werkzeug DGS zu den zwei klassischen Zugängen (dem euklidischen Zugang des Konstruierens mit Zirkel und Lineal und dem cartesischen Zugang einer berechnenden Geometrie) einen dritten Zugang gewonnen, der stärker auf explorierenden dynamischen Ansätzen beruht. Aus unserer Sicht lohnt es sich sowohl für (angehende) Lehrkräfte, als auch für Lernende, eine etwas genauere Bewusstheit über diese unterschiedlichen Zugänge zum geometrischen Konstruieren zu erlangen, denn ihre Reflexion ist ein interessanter Baustein mathematischer Bildung.

Ein Themenfeld, an dem sich diese Unterschiede in einer reichhaltigen, fächerübergreifenden Umgebung erfahrbar machen lassen, sind die Rekonstruktionen gotischer Kirchenfenster, für deren unterrichtliche Behandlung es zahlreiche überzeugende Vorschläge gibt, sowohl ohne DGS (Artmann 1995, Schmidt 1995a,b u.v.a.) als auch mit DGS (z.B. Schupp 1997).

Wir beginnen den Artikel mit der Vorstellung eines exemplarischen Konstruktionsproblems mit sechs Lösungsansätzen, die im darauffolgenden Abschnitt in einer Sachanalyse verglichen werden, so wie dies auch mit Schülerinnen und Schülern möglich wäre. Im letzten Abschnitt soll abschließend kurz auf den Wert einer expliziten Thematisierung der unterschiedlichen Zugänge und ihrer Vernetzungen im Unterricht eingegangen werden.

1. Konstruktionsproblem des Kreises im Spitzbogen und sechs Lösungsansätze

Die nebenstehende Abb. 1 zeigt die Unterteilung eines Spitzbogens, wie sie häufig in den Fenstern gotischer Kirchen zu finden ist. Dieses Bild zeigt das Bogenfeld über einer Seitentür der Kirche „Unser Lieben Frauen“ in Bremen. In diesem Bogenfeld ist ein Kreis eingeschlossen, der die begrenzenden äußeren Bögen berührt.

Der Spitzbogen selbst ist mit den Mitteln der euklidischen Geometrie einfach zu konstruieren. Diese Konstruktion ist in den ersten Schritten identisch mit der eines gleichseitigen Dreiecks:

Konstruiere eine Strecke \overline{AB} (genannt Kämpferlinie des Spitzbogens). Schlage jeweils um die Punkte A und B (genannt Kämpferpunkte des Spitzbogens) einen Kreis mit dem Radius $|AB|$. Der Scheitelpunkt S ist der obere Schnittpunkt der beiden Kreise. Die beiden Kreisbögen, die durch die Punkte A und S bzw. B und S begrenzt werden, schließen mit der Strecke \overline{AB} das Bogenfeld ein.

Herausfordernder ist der zweite Teil der Problemstellung:

Konstruiere den Inkreis des Spitzbogens, der beide Kreisbögen und die Strecke \overline{AB} berührt.

Zu dieser Aufgabe werden im Folgenden sechs Lösungsansätze vorgestellt, die die Unterschiedlichkeit möglicher Herangehensweisen deutlich machen (die ersten fünf sind in Schnoor 2003 beschrieben):



Abb. 1: Unser Lieben Frauen, Bremen,
Foto K. Schnoor

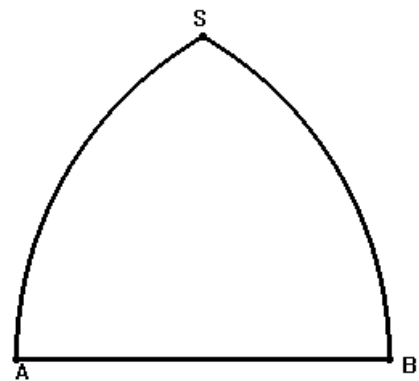


Abb. 2: Spitzbogen

1. Berechnende Lösung (nach Polya 1961)

Der Inkreis ist bestimmt durch seinen Mittelpunkt M und seinen Radius r (vgl. Abb. 3). Kennt man r , so kann M aus Symmetriegründen konstruiert werden durch Abtragen einer Strecke der Länge r auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} , ausgehend von Punkt D .

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck ADM , lässt sich der Radius des gesuchten Kreises berechnen. Dabei ist k die Länge der Strecke \overline{AB} :

$$(k-r)^2 = r^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow r = \frac{3}{8}k$$

Mit diesem Wissen kann der Inkreis auch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn man den Radius die Strecke \overline{AB} in $\frac{3}{8}$ teilt.

Dies kann entweder durch die mehrfache Konstruktion der Mittelsenkrechten geschehen oder mit Hilfe der allgemeinen Konstruktion von Streckenanteilen durch den Strahlensatz (vgl. Abb. 4).

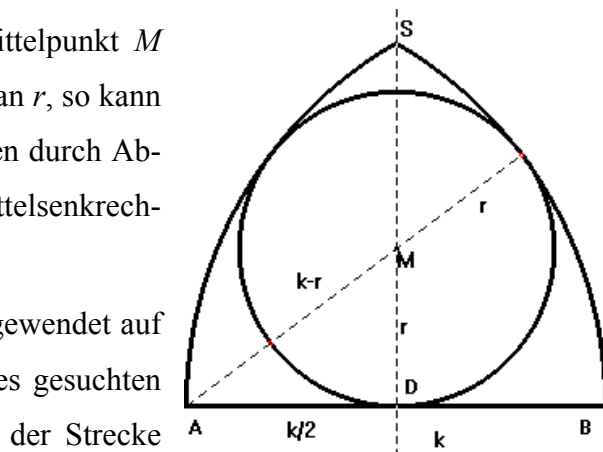


Abb. 3

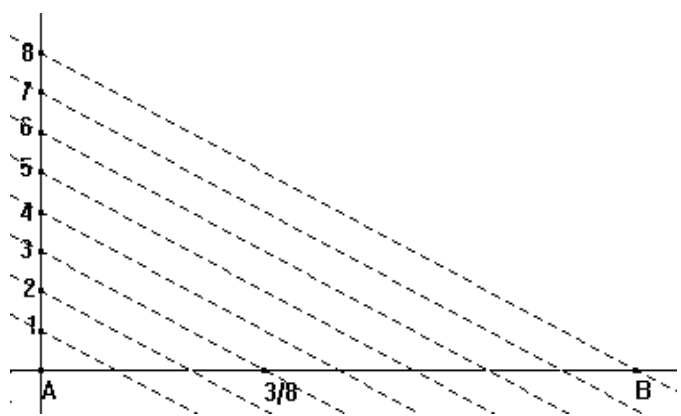


Abb. 4

2. Dynamische Lösung mit Tangenten als Kontrolle

Eine Möglichkeit zur dynamischen Konstruktion mit wenig Vorgaben (wie ihn Lernende oft entwickeln die gewohnt sind, mit dem Werkzeug DGS umzugehen), geht von der Beobachtung aus, dass der Mittelpunkt des Inkreises M auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} liegen muss, und dass die Berührbedingung zwischen Kreisbögen und Inkreis dann erfüllt ist, wenn die Tangenten an Kreisbögen und Inkreis im Schnittpunkt P identisch sind.

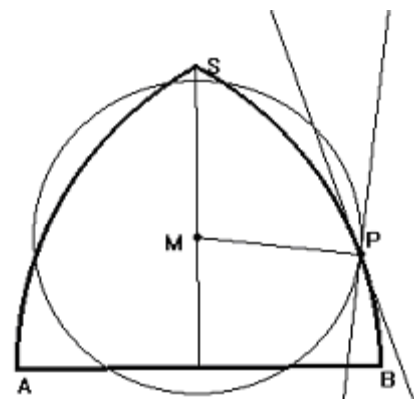


Abb. 5

Konstruktionsbeschreibung: Gegeben sei der Spitzbogen mit den Kämpferpunkten A und B und dem Scheitelpunkt S . Man konstruiert die Mittelsenkrechte m_1 von \overline{AB} und setzt einen freien Punkt M auf m_1 . Kreis K mit Radius \overline{MP} und Kreisbogen \widehat{BS} schneiden sich im Punkt P (und ggfls. in einem weiteren Punkt). Dann konstruiert man die Tangenten an K und \widehat{BS} im Schnittpunkt P . (In Abb. 5 haben sie eine unterschiedliche Richtung.)

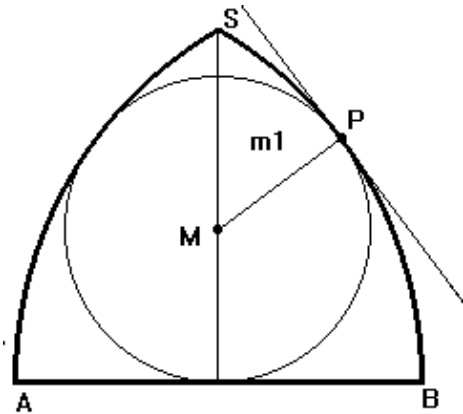


Abb. 6

Nun kann mit dem Zugmodus die Lage von M auf m_1 variiert werden und mit ihr automatisch K , P und die Tangenten. Wenn die beiden Tangenten deckungsgleich sind, ist die Berührbedingung erfüllt und der Inkreis gefunden. (wie in Abb. 6). Aufgrund der Symmetrie und der Eindeutigkeit des Berührungspunktes ist die Berührbedingung dann auch mit dem anderen Kreisbogen und der Strecke \overline{AB} erfüllt, was sich durch die DGS-Funktion „Schnittpunkt“ überprüfen lässt.

3. Dynamische Lösung mit messender Kontrolle

Die folgende dynamische Konstruktion macht sich die Deckungsgleichheit der Tangenten als Konstruktionsbedingung zu nutze: Sie geht aus von der Idee, dass M auf der Mittelsenkrechten liegt und dass, wenn die Tangenten des Kreisbogens und des Kreises im Berührungspunkt P identisch sind, der Radius \overline{MP} des Kreises auf der Geraden AP liegen muss. Deswegen kann M konstruiert werden als der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_1 mit der Strecke \overline{AP} eines frei auf dem Kreisbogen \widehat{BS} liegenden Punktes P .

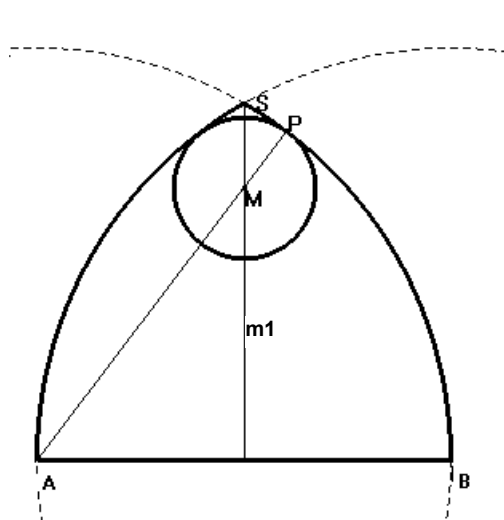


Abb. 7

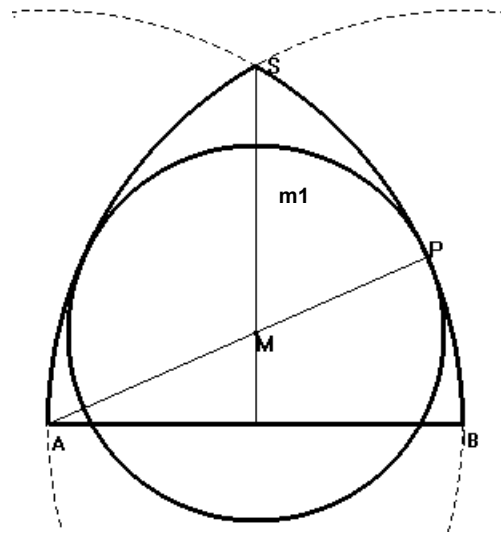


Abb. 8

Konstruktionsbeschreibung: Gegeben sei der Spitzbogen mit den Kämpferpunkten A und B und dem Scheitelpunkt S . Sei m_1 die Mittelsenkrechte von \overline{AB} und P ein freier Punkt auf dem Kreisbogen \widehat{BS} . Man konstruiert M als Schnittpunkt von m_1 mit der Strecke \overline{AP} sowie K als den Kreis mit Mittelpunkt M und Randpunkt P .

Nun kann mit dem Zugmodus die Lage von P verändert werden, und mit ihr die Lage und Größe des Kreises. Der Inkreis ist gefunden, wenn K die Strecke \overline{AB} genau in dem Punkt D (dem Fußpunkt von m_1 auf AB) schneidet. Dies kann nicht nur mit dem bloßen Auge, sondern auch durch die Messfunktion für Streckenlängen kontrolliert werden, denn es muss gelten $|MP| = |MD|$.

4. Konstruktive Lösung über die Winkelhalbierende des Kreisbogendreiecks

(nach Mertens 2000)

Mit den klassischen Konstruktionsmitteln Zirkel und Lineal lässt sich das Problem lösen durch Vervollständigung des Spitzbogens zu einem Kreisbogendreieck und Konstruktion seines Inkreises:

Innerhalb des Spitzbogens soll der eingeschriebene Kreis die umgebenden Bögen und

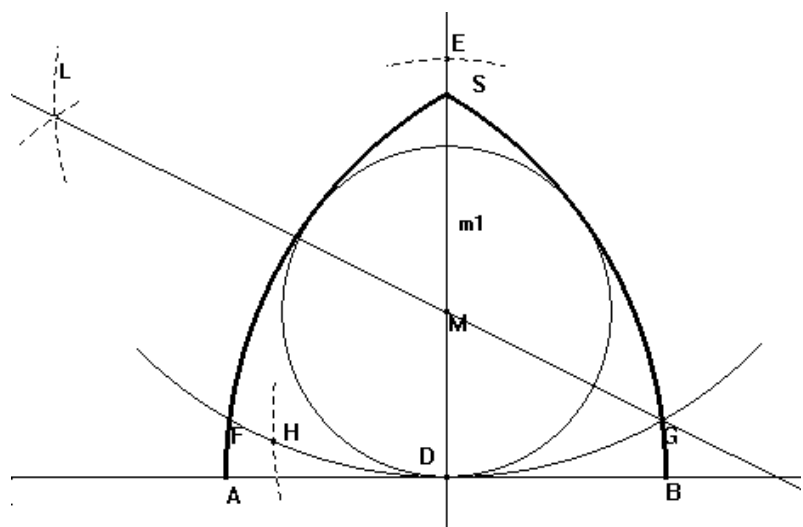


Abb. 9

auch die Strecke \overline{AB} berühren. Aus Symmetriegründen muss der Kreis die Strecke \overline{AB} genau in deren Mittelpunkt D berühren. Dieser Punkt ist ebenfalls Mittelpunkt des fehlenden Bogens des Kreisbogendreiecks, somit lässt sich der Mittelpunkt des Kreises als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Kreisbogendreieck konstruieren:

Konstruktionsbeschreibung: Gegeben sei der Spitzbogen mit den Kämpferpunkten A und B und dem Scheitelpunkt S . Um den Mittelpunkt D der Strecke \overline{AB} wird ein Kreis mit dem Radius $|AB|$ geschlagen. Dieser schneidet die Mittelsenkrechte m_1 von \overline{AB} im Punkt E . Der von E aus geschlagene Kreis mit dem Radius $|AB|$ ergibt die dritte Seite des Kreisbogendreiecks FGS . Um den Kreisbogenwinkel $\sphericalangle FGS$ zu halbieren, wird ein Kreis um G geschlagen mit Radius $|SG|$ (oder größer).¹ Der Punkt H ist der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Bogen \widehat{FG} . Um H und um S wird jeweils ein Kreis mit dem Radius $|SG|$ geschlagen. Beide Kreise schneiden sich im Punkt G und im Punkt L . Die Gerade LG ist Winkelhalbierende des Kreisbogenwinkels $\sphericalangle FGS$. Der Schnittpunkt von LG mit m_1 ist als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises mit Radius $|MD|$.

5. Konstruktive Lösung über Mittelsenkrechte

(aus einem alten Anleitungsbuch für Steinmetze, vgl Lergemüller 2001, S.180)

Konstruktionsbeschreibung: Der Spitzbogen mit der Basis \overline{AB} sei gegeben. Gezeichnet wird die Mittelsenkrechte m_1 der Strecke \overline{AB} mit Fußpunkt D . Man schlägt einen Kreis um D mit dem Radius $|AB|$. Der Schnitt dieses Kreises mit m_1 sei E . Ist m_2 die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AE} , so ergibt der Schnittpunkt von m_1 und m_2 den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist gegeben durch $|MD|$.

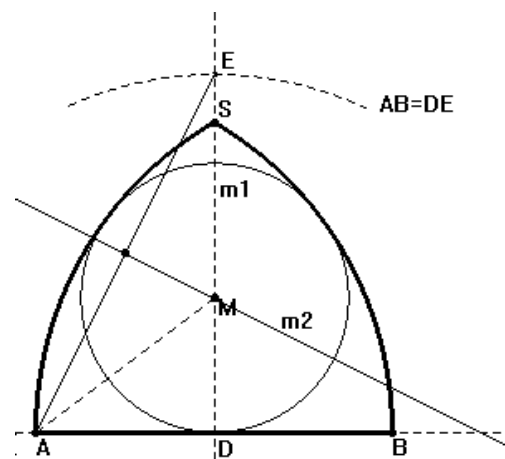


Abb. 10

¹ Die Halbierung des von Bögen eingeschlossenen Kreisbogenwinkels $\sphericalangle FGS$ erfolgt hier analog zur Winkelhalbierung eines von Geraden eingeschlossenen Winkels. Dies ist nur möglich, da die Kreisbögen des beschriebenen Kreisbogendreiecks einen gleichgroßen Radius besitzen. Diese Konstruktion lässt sich somit nicht auf alle Kreisbogendreiecke übertragen. Allgemein lässt sich die Winkelhalbierende des durch Kreisbögen eingeschlossenen Winkels über den Schnittwinkel der Tangenten im Schnittpunkt bestimmen. Denn der Winkel ist über die Tangenten der Kreisbögen definiert.

Auf der Suche nach einer Begründung für diese Konstruktion verfolgten wir zunächst die Idee, dass die Figur bei Vervollständigung des Kreisbogendreiecks drehsymmetrisch ist (siehe Abb. 11) und folglich gilt $|MB| = |ME|$. Damit müsste M auf der Mittelsenkrechten m_2 liegen, und alles weitere folgte aus Symmetriegründen. Beim explorativen Versuch, die Drehsymmetrie nachzuweisen, fiel uns der Irrtum allerdings auf (vgl. Abb. 15 und 18 im 6. Ansatz).

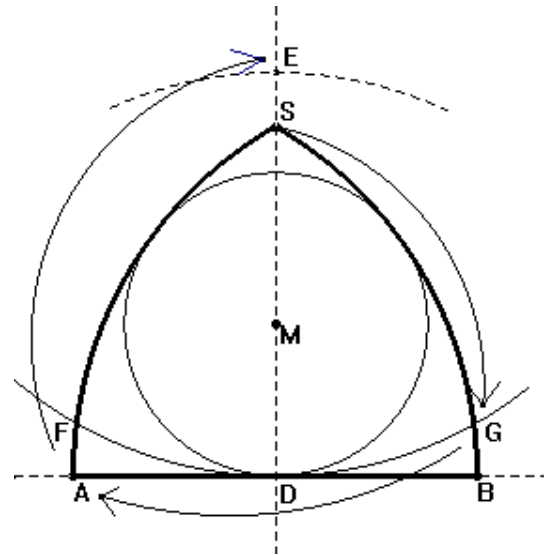


Abb. 11: Vermeintliche Drehsymmetrie

Argumentieren kann man hier statt dessen ganz statisch:

Konstruktionsbegründung: Nach Konstruktionsvorschrift gilt für die verschiedenen Radien der Kreisbögen $|AB| = |DE| = |AP|$. Da sowohl \overline{MD} als auch \overline{MP} Radien des Inkreises sind, gilt $|MD| = |MP|$ und deshalb

$$|AM| = |AP| - |MP| = |DE| - |MD| = |EM|.$$

Folglich muss M auf der Mittelsenkrechten m_2 von \overline{AE} liegen. Aus Symmetriegründen ist M damit der Schnittpunkt von m_1 und m_2 .

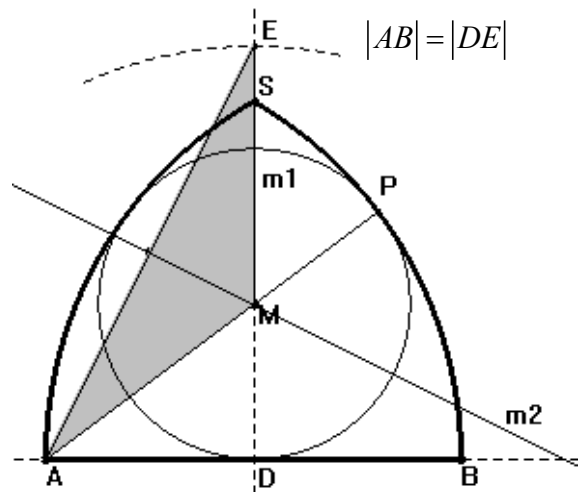


Abb. 12

6. Explorativer Lösungsansatz zum Auffinden von Symmetrien

Hat man die Konstellation des Inkreises im Spitzbogen gegeben, können sich Konstruktionsbedingungen auch explorativ ermitteln lassen, z.B. durch die Frage: Wo sind hier Symmetrien versteckt?

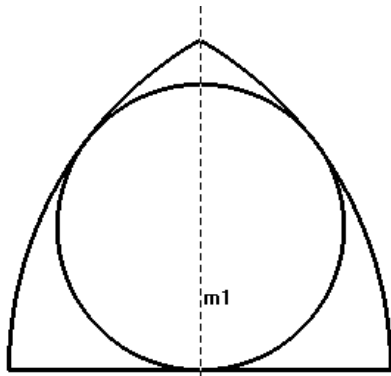


Abb. 13: Symmetrieachse

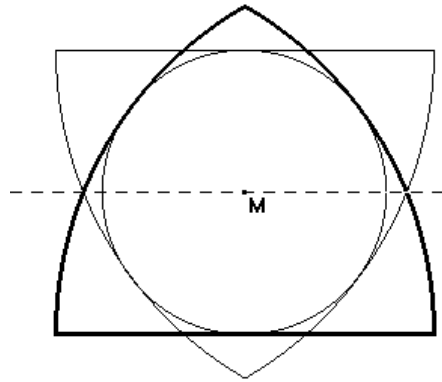


Abb. 14: Drehung um 180° = Spiegelung

Abbildung 13 zeigt die Grundkonstellation des Spitzbogens, die sich nicht ändert, wenn man eine Achsenspiegelung der Figur an m_1 vornimmt. So lässt sich die Symmetriebedingung entdecken, die in jeder der Konstruktionen benutzt wird. Abbildung 14 zeigt die Grundkonstellation und ihre Punktspiegelung an M bzw. die Achsenspiegelung an einer Parallelen zu \overline{AB} durch M . Auf Antrieb brachte uns diese Konstellation keine ertragreichen Ideen, was nicht heißt, dass es die nicht geben kann.

Abbildung 15 zeigt den gedrehten Spitzbogen, mit dem wir den fünften Lösungsansatz begründen wollten. Die Unübersichtlichkeit dieser Konstellation bewog uns dazu, die Symmetrien direkt im Kreisbogendreieck zu betrachten: Abbildung 16 zeigt das reine Kreisbogendreieck, dessen Achsensymmetrie bzgl. m_1 in Abbildung 17 zu sehen ist. Abbildung 18 zeigt, wieso sich mit der Drehsymmetrie nicht argumentieren lässt: Das Kreisbogendreieck ist aufgrund der Position von E gar nicht drehsymmetrisch! Gleichwohl lässt sich für den fünften Konstruktionsansatz eine dynamische Begründung angeben, denn das Kreisbogendreieck ist achsensymmetrisch bzgl. der Mittelsenkrechten m_2 von \overline{AE} (vgl. Abb. 19). Dies ermöglicht eine abkürzende Konstruktionsbegründung für den fünften Konstruktionsansatz.

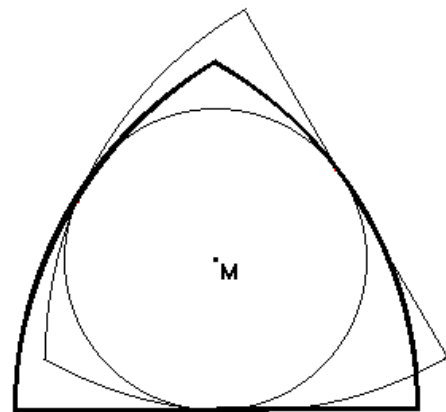


Abb. 15: Drehung um 120°

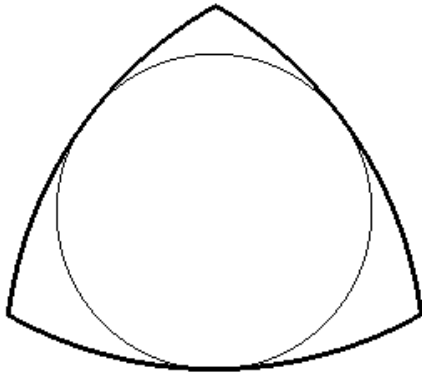


Abb. 16: gleichschenkliges Kreisbogendreieck

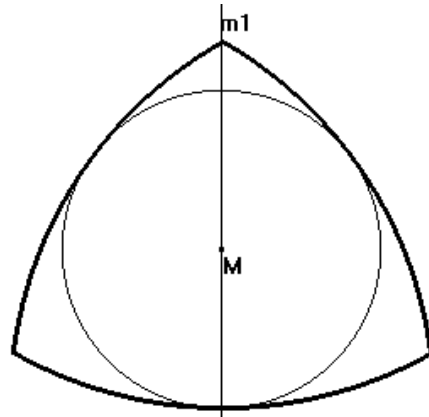


Abb. 17: Symmetrieachse m_1

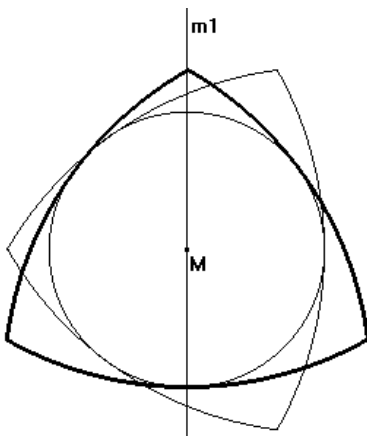


Abb. 18: Drehung um 90° um M

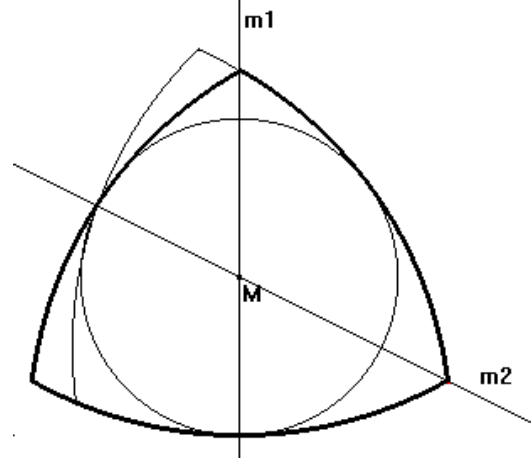


Abb. 19: Spiegelung an m_2

Wozu braucht man für diese Betrachtungen ein DGS? Natürlich können all diese Bilder auch mit Hand erzeugt werden, doch was mit Zirkel und Lineal relativ großer Aufwand ist, lässt sich mit dem DGS durch wenige Mausklicks realisieren. Der rein zeitliche Unterschied wird damit in Explorationsphasen zum qualitativen Unterschied.

2. Vergleich der Lösungsmöglichkeiten

Die verschiedenen vorgestellten Lösungsbeispiele stehen exemplarisch für ganz unterschiedliche Zugänge zu Konstruktionsproblemen. Während in der vierten und fünften Lösung nur die eingeschränkten Mittel der euklidischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal aktiviert werden (wir kürzen sie im Folgenden ab als ZL-Konstruktionen), benutzen insbesondere die dynamischen Ansätze in der zweiten und dritten Lösung durch den Zugmodus Konstruktionselemente, die in dem klassischen Kanon der ZL-Konstruktionen nicht erlaubt sind (vgl. Steele 1936). Diese Konstruktionselemente haben historische Vorbilder etwa in den Einschiebekonstruktionen von Archimedes, aus Gründen der fehlenden Passung zur Axiomatik der euk-

lidischen Geometrie wurden sie aber aus dem Kanon der „erlaubten“ Konstruktionen mit Zirkel und Lineal verdrängt (zur Beziehung zwischen den Axiomen der euklidischen Geometrie und den „Spielregeln“ der ZL-Konstruktionen siehe z. B. Neumayer 1999). Durch die Möglichkeiten der dynamischen Geometriesoftware erhalten sie nun mit neuem Gewicht wieder Einzug in die Geometrie.

Die berechnende erste Lösung diente schon Polya bei der Beschreibung von Problemlösestrategien als Beispiel für das von ihm so genannte „Descartsche Schema“ (vgl. Schmidt 1995). Der Name nimmt Bezug auf Descartes Idee, geometrische Zusammenhänge algebraisch zu erfassen und somit einer algebraischen Behandlung zugänglich zu machen:

„Das Descartsche Schema:

Erstens: Man reduziere jede Art von Problem auf ein mathematisches Problem.

Zweitens: Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein algebraisches Problem.

Drittes: Man reduziere jedes algebraische Problem auf die Lösung einer einzigen Gleichung.“ (Polya, zitiert nach Schmidt 1995b, S. 71)

Dieser Ansatz kann als zentrale Idee der analytischen Geometrie im Unterricht gar nicht deutlich genug herausgestellt werden (vgl. Wittmann 2003). Denn auch wenn analytische Geometrie in Koordinatensystemen erst in Klasse 12 systematisch entwickelt wird, ist doch ihre Grundidee durch die berechnende Geometrie der Strahlensätze, der Satzgruppe des Pythagoras und der Trigonometrie in Klasse 9/10 bereits vorbereitet. Sie sollte auch von Lernenden als qualitativ anderer Zugang zur Geometrie wahrgenommen werden.

Während also auf den ersten Blick die Beispiele prototypisch für grundsätzlich unterschiedliche Zugänge zu stehen scheinen, zeigt sich bei genauerer Betrachtung, wie stark die Zugänge in den Lösungsansätzen miteinander verwoben sind. Deutlich wird dies, wenn wir die Konstruktionen jeweils in ihre zwei Phasen *analysis* und *synthesis* zerlegen.

„Was ist eine Analysis und was eine Synthesis?

Eine Analysis ist die Zugrundelegung des Gefragten als anerkannt um seiner auf anerkannt Wahres führenden Folgerungen willen.

Eine Synthesis ist die Zugrundelegung des Anerkannten um seiner auf Vollendung oder Ergreifung führenden Folgerungen willen.“ (Euklid XIII, 1-5, zit. nach Artmann 1999, S. 102f, Übersetzung Artmann)

In heutiger Sprache formuliert: In der ersten Phase einer Konstruktion, der Analyse, betrachtet man die zu konstruierende Figur als gegeben und analysiert zunächst die sie charakterisierenden Zusammenhänge. Die dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten werden dann in der Phase der Synthese zur eigentlichen Konstruktion benutzt.

Analysis und *Synthesis* zeigen sich in der Darstellung von Konstruktionen in unterschiedlicher Form: Während in der vierten Lösung die Analyse explizit formuliert und der Synthese, d.h. der Konstruktionsbeschreibung, vorangestellt wurde, wurde in der fünften Lösung mit der Synthese begonnen, die Analyse findet sich in der Konstruktionsbegründung hinterher wieder. Für die anderen Beispiele zeigt sich bei Aufgliederung nach den Phasen eine Mischung der Zugänge (vgl. den Überblick in der Tabelle auf der nächsten Seite): In der berechnenden ersten Lösung ist der cartesische Zugang nur für die Analyse von Bedeutung, für die darauf aufbauende Synthese reichen die Mittel der ZL-Konstruktion aus. Umgekehrt geht in dem zweiten und dritten Beispiel den dynamischen Konstruktionen eine Analyse im Sinne der euklidischen Geometrie voraus. Kennzeichnend ist jedoch, dass die in dieser Analyse gefundenen Bedingungen die Lage des Mittelpunktes und des Radius nicht vollständig charakterisieren, sondern Freiheitsgrade lassen, die den Einsatz des Zugmodus erfordern. Die dritte Lösung basiert auf einer etwas weitergehenden Analyse als die zweite Lösung, denn was für die zweite eine nur durch bloßes Hinsehen zu überprüfende Kontrollbedingung ist (Tangentengleichheit), ist in der dritten Lösung als analytische Voraussetzung in die Konstruktion mit eingegangen. Die in der dritten Lösung formulierte messende Kontrollbedingung $|MP| = |MD|$ würde man eher der berechnenden Geometrie zuordnen, auch mit ihr ist in diesem Kontext die Problematik der Ungenauigkeit verbunden.

Natürlich kann der Einsatz eines DGS auch die Analyse selbst unterstützen, wie im sechsten Lösungsansatz. Hier dienen die Möglichkeiten des DGS, mit relativ wenig Aufwand Kongruenzabbildungen auf die Figur anzuwenden, als heuristisches Mittel zum explorativen Auffinden von Gesetzmäßigkeiten in der Figur, die dann die Grundlage bilden können für eine klassische ZL-Konstruktion oder eine dynamische Konstruktion in der Synthese-Phase. Die allgemeine heuristische Strategie „Suche Symmetrien in der Figur“ führt auf die Idee, die Figur zu einem Kreisbogendreieck zu ergänzen, die für die konstruktive vierte und fünfte Lösung notwendig ist.

Überblick zur Vernetzung der Zugänge in den Lösungsansätzen

	1. Berechnende Lösung mit Pythagoras	2. Dynamische Lösung mit Tangentenbedingung	3. Dynamische Lösung mit Messbedingung	4. Konstruktive Lösung über Winkelhalbierende des Kreisbogendreiecks	5. Konstruktive Lösung über Mittelsenkrechte	6. Explorativer Lösungsansatz zum Auffinden von Symmetrien
Analyse	algebraisch: Achsensymmetrieargument, rechtwinkliges Dreieck, Satz des Pythagoras	euklidisch (unterbestimmt): Achsensymmetrieargument	euklidisch (unterbestimmt): Achsensymmetrieargument Berührbedingung Tangentengleichheit	euklidisch (vollständig): Achsen- und Drehsymmetrie, Abstandseigenschaft der Winkelhalbierenden	euklidisch (vollständig): Achsen- und Drehsymmetrie, Abstandsgleichheit, Mittelsenkrechte	explorierend: Symmetriebedingungen findend, dann weiter mit 1-5
größte kreative Leistung der Analyse	passende algebraische Zusammenhänge aufspüren	Kontrollbedingung finden	Bedingung Tangentengleichheit konstruktiv nutzen	Vervollständigung der Figur zum Kreisbogendreieck	Vervollständigung der Figur zum Kreisbogendreieck, Finden der Abstandsgleichheit (statisch oder dynamisch)	Übergang zur Synthese
Synthese	ZL-Konstruktion oder durch Abmessen	dynamische Konstruktion durch Zugmodus, Kontrollbedingung Tangentengleichheit in Berührungspunkt	dynamische Konstruktion Kontrollbedingung messend	ZL-Konstruktion (mit Schwierigkeit Kreisbögen)	ZL-Konstruktion	ZL-Konstruktion oder dynamische Konstruktion

3. Sprechen über Unterschiede und Gemeinsamkeiten –

Bildungschancen für den Unterricht

Im Unterricht zu einem Problem unterschiedliche Lösungswege zu erlauben und aufzuzeigen, ist eine alte didaktische Forderung, die in der Unterrichtspraxis zunehmend auch umgesetzt wird. Neubrand/Neubrand (1999) haben am Beispiel einer japanischen Geometrie-Stunde der TIMSS-Video-Studie herausgearbeitet, dass das Nebeneinanderstellen verschiedener Lösungswege im Unterricht vor allem dann fruchtbar wird, wenn sie Ausgangspunkt sind für Reflexionen über Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Lösungen. Ein Vergleich der unterschiedlichen Möglichkeiten wie im vorangehenden Abschnitt sollte daher auch mit Schülerinnen und Schülern angestellt werden. Die größte Bildungschance sehen wir dabei in der Gegenüberstellung dreier grundsätzlich unterschiedlicher Zugänge zu geometrischen Problemen, die aber dennoch in der dargestellten Weise verknüpft sind.

Darüber hinaus kann ein solches Gespräch zum Ausgangspunkt werden für viele weitere interessante Fragen, die Lernende zum Reflektieren über Mathematik veranlassen können:

- Wieso überhaupt sind bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal genau diese „Spielregeln“ erlaubt, andere nicht?
- Wie halten wir es mit der Genauigkeit einer dynamischen Konstruktion, wann kann ich mir sicher sein, dass die Konstruktion richtig ist?
- Wo gibt es welchen Begründungsbedarf, und was akzeptieren wir einfach durch Hinsehen?
- Wie kann uns der Computer dabei helfen, klassische Geometrie zu betreiben, und wo macht er sie überflüssig?
- Inwiefern ist die berechnende Geometrie eigentlich „richtige“ Geometrie?
- Descartes Schema lebt von der Idee, geometrische Probleme in die Algebra zu übersetzen, haben wir auch schon das Umgekehrte gesehen? (Ja z.B. bei Linearen Gleichungssystemen).
- u.v.m.

All dies kann an der Rekonstruktion eines Kirchenfensters erarbeitet werden, die uns selbstverständlich nur als Exemplifizierung eines allgemeinen didaktischen Ansatzes dient. Für die Übertragung auf andere Beispiele sind der Phantasie der Lesenden keine Grenzen gesetzt.

Literatur

- B. Artmann: Zur Geometrie gotischer Maßwerkfenster, in: Der Mathematikunterricht (Mai 1995), S. 9-15.
- B. Artmann: Euclid. The creation of Mathematics, Springer New York 1999.
- H. Hischer (Hrsg.): Computer und Geometrie, Suchen, Entdecken, Anwenden. Franzbecker, Hildesheim 1998.
- A. Lergemüller u.a. (Hrsg.): Neue Wege 7, Arbeitsbuch Mathematik für Gymnasien. Schroedel, Hannover 2001.
- B. Mertens: Landeswettbewerb Mathematik 2000, Uni Kaiserslautern; Online-Quelle: www.mathematik.uni-kl.de, 2000 (Zugriff Januar 2003).
- J. Neubrand / M. Neubrand (1999): Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde, in: Selzer, Christoph / Walther, Gerd (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann, Klett Grundschulverlag Leipzig, S. 148-158.
- B. Neumayer: Der Begriff der „Konstruierbarkeit“ in der Geometrie, in: Praxis der Mathematik 1999 (41) 4, S.148-151
- G. Polya: How to solve it. Mathematical discovery. Learning and teaching problem solving. Vol. 2., Wiley, New York 1961.
- G. Schmidt (Hrsg.): Gotische Maßwerkfenster im Geometrieunterricht, Themenheft Der Mathematikunterricht 41 (3) 1995a.
- G. Schmidt: „Mathematik kommt vor“, Vielfältige und bedeutungsvolle Schüleraktivitäten zur Geometrie von Maßwerkfenstern in gotischen Kirchenfenstern, in: Der Mathematikunterricht 41 (3) 1995b, S. 61-74.
- K. Schnoor: Konstruieren gotischer Kirchenfenster mit dynamischer Geometrie Software, unveröffentlichte schriftliche Hausarbeit zur 1. Staatsprüfung, Universität Bremen, 2003.
- H. Schupp: Regeometrisierung der Schulgeometrie – durch Computer?, in H. Hischer (Hrsg.): Computer und Geometrie. Neue Chancen für den Geometrieunterricht?, Franzbecker Hildesheim 1997, S. 16ff.
- A. Steele: Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik, in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B3, 1936, S. 288-369.
- H.-G. Weigand, T. Weth: Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen, Spektrum Verlag, Heidelberg 2002.
- G. Wittmann: Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie, in: Mathematik lehren 119 (2003), S. 47-51.