

## Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen

### Fallbeispiel zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen

Die Kurzfassung dieses Artikels erscheint in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2005.

#### Überschneidungseffekte in konstruktivistischer Sicht

Es gehört zum Standardgedankengut einer konstruktivistischen Lerntheorie, dass Lernen sich immer nur als individuelle, aktive Konstruktion mentaler Strukturen vollziehen kann, wobei die individuell entwickelten Vorstellungen und Konzepte ganz erheblich mitgeprägt werden von den Vorerfahrungen und dem Vorwissen, auf das diese neuen Vorstellungen aufbauen können (z.B. Gerstenmaier/Mandl 1995, Aufschnaiter u.a. 1992). Dies führt häufig zu Überschneidungseffekten.

Überschneidungseffekte sind in der Mathematikdidaktik zunächst auf der rein sprachlichen Ebene untersucht worden (z.B. Vollrath 1978). Lernende bringen in den Unterricht zu eingeführten Fachbegriffen „bereits Bedeutungsvorstellungen mit [...], jedoch solche von anderer Art“ (Maier/Schweiger 1999, S. 121). Diese Wortbedeutungen können die mathematischen Begriffsbedeutungen „störend überlagern und deren korrekte Auffassung erschweren“ (Maier/Schweiger 1999, S. 122).

Insbesondere die naturwissenschaftsdidaktische Lernforschung hat in vielen empirischen Untersuchungen gezeigt, dass Überschneidungseffekte nicht nur im sprachlichen Bereich, sondern noch gravierender im Bereich der Vorstellungen, Strategien und Denkweisen den Lernprozess beeinflussen (Duit/von Rhöneck 1996, für Mathematik auch Bishop 1994, Nunes u.a. 1993 u.v.m.). Dabei ist das Verhältnis von eingebrachten Vorstellungen und zu lernenden wissenschaftlichen Vorstellungen oft nicht konfliktfrei. Gleichzeitig ist die Diskrepanz in vielen Fällen weder Lehrkraft noch Lernenden bewusst (Duit/von Rhöneck 1996).



Abb. 1: Überschneidungseffekte (Lionni 1970)

## **Überschneidungseffekte in der Entwicklung stochastischen Denkens**

Die Entwicklung stochastischen Denkens gilt als Herausforderung des MUs, die, gemessen an den stochastischen Kompetenzen vieler Erwachsener, besonders wenig gelingt. Als Ursache nennen Wolpers und Götz (2002) in ihrer Zusammenfassung des internationalen Forschungsstands besondere Schwierigkeiten der bereichsspezifischen Denkweisen, aber vor allem auch Überschneidungseffekte. Denn „anders als z.B. für die Geometrie gilt für die Stochastik, dass

- außerunterrichtliche Erfahrungen mit den bereichsspezifischen Phänomenen kaum reflektiert sind (,Lotto', ,Zufall', ,Wahrscheinlichkeit', ...)
- Probleme der Darstellung durch Sprache (Umgangssprache – Fachsprache) oder Visualisierungen größer sind als in der Geometrie (,Zufall', ,Wahrscheinlichkeit', ... vs. ,Dreieck', ,Schnittpunkt', ...)
- sich Intuitionen entwickeln, die Begriffsentwicklungen oder Problemlösungen blockieren können (,stochastische Abhängigkeit' - ,Kausalität', ...)
- sich ,urwüchsig' entwickelnde heuristische Strategien ungeeignet sein können.“ (Wolpers/Götz 2002, S. 137)

Was Wolpers/Götz hier beschreiben, lässt sich als Phänomene längerfristiger Lernprozesse im Einzelfall nicht immer leicht rekonstruieren. Es ist bemerkenswert an dem im Folgenden skizzierten Fallbeispiel, dass die Bedeutsamkeit von Überschneidungseffekten hier auch ganz kurzfristig sichtbar gemacht werden kann, und zwar an einem noch elementareren stochastischen Inhalt als den genannten Beispielen.

Das Fallbeispiel kann hier nur überblicksartig vorgestellt werden, für das ausführliche Transkript, seine Analyse und theoretische Einordnung in eine interkulturelle Perspektive sei auf Prediger (2004) verwiesen.

### **Fallbeispiel: Karina, Lisa und das Augensummenspiel**

Im Folgenden wird ein Ausschnitt einer Lehr-Lernsituation vorgestellt, in der zwei Studierende, hier genannt Emil (mit Drittsprache Deutsch) und Johannes, im Rahmen einer klinischen Untersuchung mit zwei elfjährigen Mädchen gearbeitet haben, die hier Karina und Lisa genannt werden. (Die hier beschriebene Situation stammt aus den ersten Versuchen einer Serie von Untersuchungen, aus deren schwierigem Verlauf die beteiligten Studierenden sehr viel gelernt haben. Obwohl sie aus diesen Gründen keinen Eingang in die eigentliche Untersuchung gefunden hat, ist sie hier interessant, um Überschneidungseffekte sichtbar zu machen.)

Die Lehr-Lernsituation wurde für die Kinder als Spiel eingeführt, in dem sie auf Zahlen von 1 bis 12 setzen sollten. Gewinnen konnte, wessen Zahl als Augensumme zweier Würfel gewürfelt wurde. Es wurde gesetzt, gespielt, Buch geführt und nachgedacht über die zentrale Frage „Welche Zahl

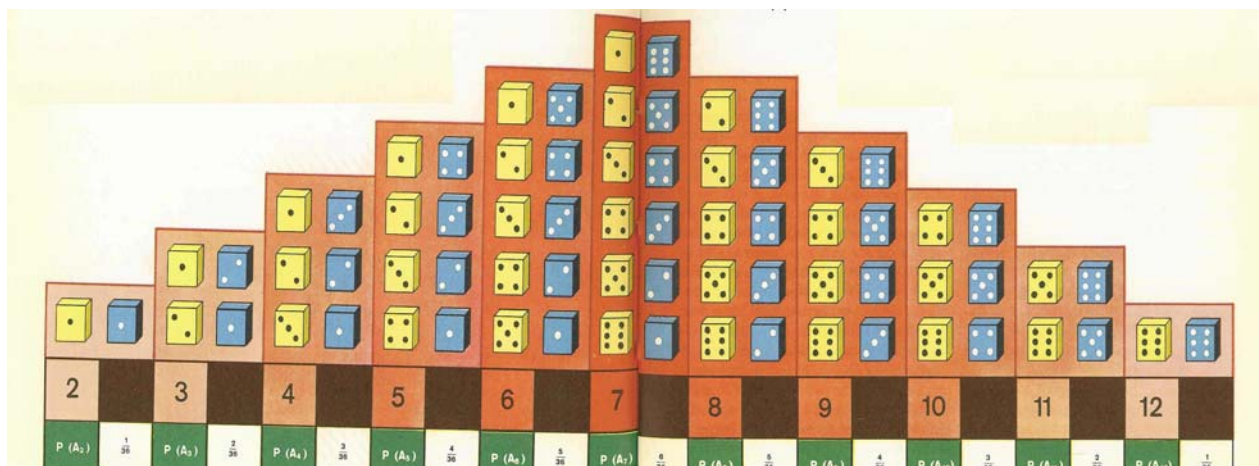


Abb. 2: Kombinatorische Struktur des Augensummenspiels, Fuchs 1966, S. 194f.

ist die schlaueste, auf die wir setzen können?“. Die Studenten hatten als mögliche Antwort die kombinatorische Struktur der Situation vor Augen, mit der man durch Zählen der verschiedenen möglichen Würfelbilder für eine Augensumme die Wahrscheinlichkeiten vergleichen kann (s. Abb. 2).

### *Fehlvorstellungen oder berechtigte Perspektiven?*

Bevor die Mädchen in der Situation zu dieser Strukturierung kamen, haben sie als Begründungen für Setzentscheidungen und das mehr oder weniger häufige Auftauchen bestimmter Augensummen ganz unterschiedliche Ansätze angeführt: Neben einem Bedeutsamkeitsansatz (vgl. Abb. 3) und einem Beeinflussungsansatz aktivierten die Mädchen immer wieder als Begründung einen Erreichbarkeitsansatz, nach dem die Augensummen unterschiedlich schwer erreichbar sind, je nachdem, ob sie aus leicht oder schwer zu würfelnden Würfelergebnissen zusammengesetzt sind:

„Für 6 kann man ne Fünf und ne Eins kriegen'. [...], wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen.“ (Z. 153)

(Die Zahlen in Klammern oder zu Beginn einer Zeile verweisen auf die entsprechenden Zeilen im Transkript des Videomitschnitts, es liegt auf meiner Homepage ein größerer Auszug bereit).

Insbesondere Bedeutsamkeitsansatz und Beeinflussungsansatz sind immer wieder auftauchende alltägliche Erklärungsansätze für stochastische Situationen, die vielfach empirisch rekonstruiert wurden (z.B. Fischbein u.a. 1991, Wollring 1994, Malle/Malle 2003). Sie gelten als Beleg dafür, dass angemessene stochastische Vorstellungen besonders schwer zu erwerben sind. Ein Begründungsstrang geht auf Überschneidungseffekte zurück, denn es werden zwar vielfältige vorunterrichtliche Erfahrungen mit Zu-

fallsphänomenen, z.B. beim Spielen, gemacht, diese werden jedoch selten reflektiert, so dass sich urwüchsig entwickelnde Erklärungsansätze später als lernhinderlich auswirken können.

Deswegen schlug Winter (1976) schon vor langem vor, mit Stochastikunterricht früh zu beginnen, um diese primären Intuitionen durch sekundäre Intuitionen ablösen zu können (Fischbein 1975). In zahlreichen Studien wurden Lehrstrategien entwickelt und evaluiert, um lernhinderliche Erklärungsansätze (interpretiert als Fehlvorstellungen) durch mathematisch tragfähigere Ansätze zu ersetzen.

Da der umfassende Erfolg dieser Maßnahmen bisher dennoch ausbleiben scheint, lohnt es sich, das Phänomen noch einmal neu in eher horizontaler Sichtweise zu analysieren, in der diese Intuitionen nicht als zu überwindenden Fehlvorstellungen betrachtet werden, sondern als konkurrierende Perspektiven, die bei vielen Menschen neben den mathematischen Vorstellungen auch auf Dauer bestehen bleiben (vgl. Prediger 2004).

In dieser - meiner Ansicht nach realistischeren - Sichtweise stellt sich die Frage, ob die vermeintlichen Fehlvorstellungen nicht vielleicht doch auch in gewisser Weise berechtigte Perspektiven darstellen. Vertiefte Analysen der Daten zeigen, dass die Divergenzen in der Aufmerksamkeitsfokussierung die eigentliche Ursache für die unterschiedlichen Perspektiven bilden (vgl. Abb. 3). So lange man die Aufmerksamkeit auf das Einzelergebnis fokussiert, so wie es Karina und Lisa tun, wenn sie z.B. die Frage beantworten, wieso ein bestimmtes Würfelergebnis eingetreten ist, so lange ist der Bedeutsamkeitsansatz nicht weniger angemessen als der Ansatz des Möglichkeiten-Zählens, der erst auf lange Sicht an Relevanz erhält.

### Divergierende Aufmerksamkeitsfokussierung als Ursache für Diskrepanzen zwischen fachlicher und individueller Perspektive

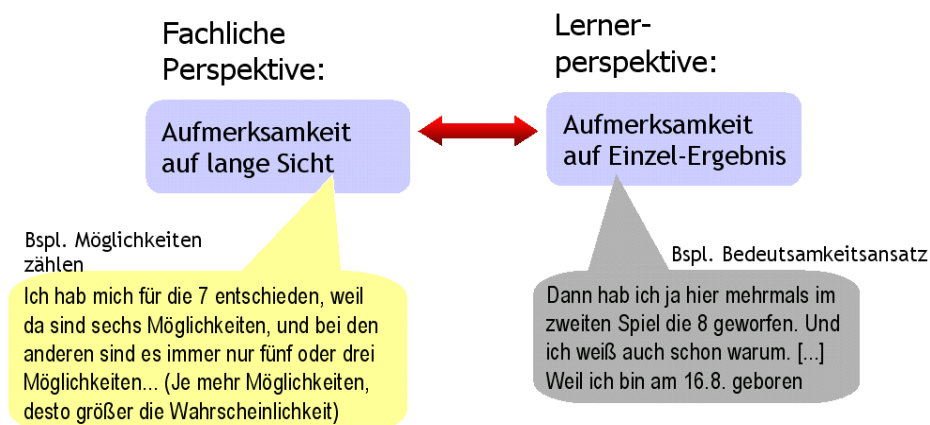


Abb. 3: Fehlvorstellungen oder berechtigte Perspektiven?

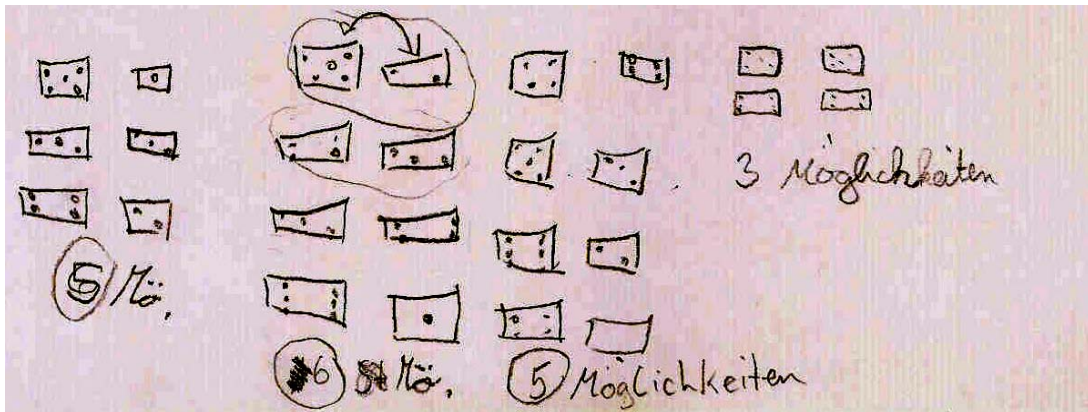


Abb. 4: Während der Lehr-Situation gezeichnete Übersicht zu Möglichkeiten

So rückt durch das Gegenüberstellen von fachlicher Perspektive und Lernendenperspektive ein wesentliches Charakteristikum der Stochastik in den Vordergrund, das Hefendehl-Hebeker so formuliert hat:

„Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode. Diese Einschätzung zu präzisieren gehört zu den Aufgaben einer Einführung in die Stochastik.“ (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 13)

#### *Ein Lehrstück für Überschneidungseffekte*

Die Lehrsituation liefert im weiteren Verlauf ein gutes Beispiel für lernhinderliche Überschneidungseffekte, bei der diese verschiedenen Sichten sich in der Kommunikation überlagern.

Nachdem die Mädchen vielfältige Erklärungsansätze geäußert haben, die eine gewisse Entfernung zu den fachlichen Ansätzen zeigen, versuchen Johannes und Emil, sie näher an die angestrebten stochastischen Strategien heranzubringen. Dazu fordert Johannes sie auf, die Würfelbilder zu den einzelnen Augensummen aufzumalen (für das Ergebnis vgl. Abb. 4).

Während Lisa der Forderung nachgeht, äußert sie wiederum ihre Idee des Erreichbarkeitsansatzes, nach dem die einzelnen Würfelergebnisse unterschiedlich schwierig zu erreichen sind:

- 153 L: Also für 6 kann man ne Fünf und ne Eins kriegen' (*malt die Würfelbilder*) ... Dann kann man, wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen (*malt*). Und dann hat man noch, ähm 6- wie kann man noch ne 6 kriegen? Mit ner Vier und ner Zwei (*malt*) Mit ner Vier und ner Zwei, wie kann man noch noch ne 6 kriegen?

Emil und Johannes gehen darauf aber nicht ein. Statt dessen vermitteln sie den beiden, dass die Reihenfolge der einzelnen Würfelergebnisse von Bedeutung ist. Dann leiten sie zur Frage über, welche Augensumme nun am schwierigsten zu würfeln ist:

- 194 J: ... aber welche Zahl ist dann – welche Zahl ist dann – (2 sec Pause) am schlausten zu würfeln? Wenn Du das so mal anguckst?
- ...
- 197 L: Dann ist am einfachsten zu würfeln – (2 sec Pause, *guckt auf das Blatt*) Na ja so gesehen – die Vier und die Zwei kann man leicht würfeln...
- 198 J: ... Nein, also welche Zahl, 6, 7 oder 8? Insgesamt? Die setzt sich ja immer aus zwei Würfeln zusammen. Welche Zahl zusammen ist dann Deiner Meinung nach die schlauste Zahl. Die ganzen Paare, auch die die man umtauscht. Also 7, das ist Sechs-Eins und Eins-Sechs auch.
- 199 L: (*startt auf das Blatt, sucht, 5 sec*)
- 200 J: Hast Du was gefunden?
- 201 L: (*guckt auf*) Ja, also zwei hab ich, die man ziemlich leicht würfeln kann. Die Vier und die Zwei und die Zwei und die Vier, und wo hab ich? Da. Die Fünf und die Drei und die Drei und die Fünf. Die beiden kann man ziemlich leicht würfeln.
- 202 E: Zwei, Drei, Vier und Fünf, die sind leichter?
- 203 L: Ja.
- 204 E: Als Eins und Sechs?
- 205 L: Ja, weil ne Sechs, das ist schon schwierig, dass man ne Sechs würfelt.
- 206 E: Und, die Zwei ist einfacher?
- 207 K: Ja

In diesem Abschnitt zeigen sich die unterschiedlichen Perspektiven: Lisa widmet sich der Frage, welches einzelne Würfelergbnis am einfachsten zu erreichen ist. Sie ist dabei von ihren individuellen „Vorerfahrungen“ geprägt, dass eine Sechs beim Spielen seltener auftaucht als eine Zwei, Drei, Vier oder Fünf (Z. 201-203). Diese Sicht wird von Wolpers und Götz als Beispiel für eine häufig auftretende alltägliche Vorstellung (primäre Intuition) zitiert:

„Weil beim Würfelspiel die ‚6‘ wichtiger ist, glaubt man, dass sie im Verhältnis weniger oft auftritt als die anderen Zahlen.“ (Wolpers/Götz 2002, S. 140, vgl. auch Green 1983).

Lisa schätzt die Wahrscheinlichkeit einer Augensumme aus dieser Logik heraus durch die Überprüfung ab, welche Augensumme aus schwierigen einzelnen Würfelergbnissen zusammen gesetzt sind, welche aus leichten. Die Aufmerksamkeit muss in diesem Ansatz notwendig auf die einzelnen Würfelergbnisse fokussiert sein, denn von ihnen hängt die Wahrscheinlichkeit ja ab.

Im Gegensatz dazu gehen die beiden Lehrenden wie selbstverständlich von einer Gleichwahrscheinlichkeitsannahme für die einzelnen Würfelergbnisse aus und fokussieren ihre Aufmerksamkeit auf die Würfelbilder, also die Zusammensetzung von jeweils zwei (gleich wahrscheinlichen) Würfelergbnissen. Diese Annahme macht Laplace nach dem Prinzip des unzureichenden Grundes: Wenn man keinen Grund hat, irgendeines der

Versuchsergebnisse für wahrscheinlicher als die anderen zu halten, dann sind alle gleich wahrscheinlich, und man darf die Regel ‚günstige durch mögliche‘ anwenden, die der Strategie des Möglichkeitzählens hier zugrunde liegt (vgl. Borovcnik 1992, S. 99). Karina und Lisa dagegen haben einen für sie zureichenden Grund für eine andere Annahme: In ihrer Spielerfahrung erschien ihnen die Sechs seltener als andere Zahlen.

Die hinter der unterschiedlichen Aufmerksamkeitsfokussierung liegenden divergierenden Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Würfelergebnisse werden aber nicht expliziert. Statt Maßnahmen zur Aufklärung des Kommunikationshindernisses zu ergreifen, setzen Johannes und Emil nun im Weiteren auf direkte Instruktion in suggestiver Gesprächsführung, um den angestrebten Ansatz des Möglichkeiten-Zählens zu vermitteln. Unter relativ kleinschrittiger Anleitung kommen die Studenten vordergründig zu ihrem gesetzten Ziel (Z. 208-239), was hier aber ausgelassen wird. Verschriftlichtes Ergebnis dieses Abschnitts ist die vollständige Übersicht aus Abb. 4.

Die Qualität der auf diese Weise vermittelten Einsichten in das neu eingeführte Zählprinzip wird allerdings unmittelbar darauf deutlich:

- 240 J: Dann gucken wir mal bei den anderen? Wie viel sind es da?  
241 K,L: *(starren aufs Blatt und zählen leise vor sich hin, 9 sec)*  
242 E: Wieso. Warum hast Du nicht beispielsweise Zwei und Fünf hier dazu geschrieben? Du hast doch schon Fünf und Zwei als Möglichkeit.  
243 L: Ja weil man, wenn man ähm, dann kann man das ähm in Gedanken umdrehen, dass hier die Zwei und da die Fünf ist.  
244 K: *(nimmt den Stift und malt es dazu)* Man kann das natürlich auch, so dass man das umdrehen kann, hinzeichnen dann.  
245 E: Ja, und wenn man das alles zusammenaddiert, was bekommt man denn dann als Gesamtmöglichkeiten?  
246 L,K: *(gucken und zählen)*  
247 E: Ja, entweder Fünf-Zwei, oder Zwei-Fünf...  
248 L: sechzehn Möglichkeiten  
249 E: sechzehn Möglichkeiten  
250 L: *(nickt)* weil das sind weil das hier sind acht Kästchen, und dann - da sind keine gleichen Zahlen bei, und wenn man diese ähm umdreht, dann hat man andere Möglichkeiten, und das sind wieder acht. Und acht und acht sind sechzehn.  
251 E: acht und acht sind sechzehn.  
252 L: Ja, weil, dann hat man eben sechzehn.

In dem dann fehlenden Stück drücken die beiden Lehrenden ihre Ratlosigkeit aus. Der scheinbare Erfolg der Erarbeitung bis Z. 239 wird in diesen darauffolgenden Zeilen erheblich in Frage gestellt: Als die Mädchen aufgefordert sind, den zuvor eng geleiteten Zählvorgang auf ein anderes Bei-

spiel zu übertragen, zeigen sich die Wirkungen der immer noch bestehenden Überschneidungssituation zweier konkurrierender Ansätze:

Obwohl sie einerseits den Instruktionen der Studenten gefolgt sind, schlägt nun andererseits ihre divergierende Aufmerksamkeitsfokussierung auf die einzelnen Würfelergebnisse wieder durch, die sie dazu bewegt, statt der Würfelbilder einzelne Würfelergebnisse zu zählen. Johannes lokalisiert schließlich das Problem und fragt nach (269).

269 J: Zählst Du immer jeden Würfel als Möglichkeiten, oder zählst Du eigentlich das Würfelpaar? Weil das Würfelpaar macht ja nachher die Zahl.

Als sich dies durch die Antwort der Mädchen bestätigt, sieht sich Johannes gezwungen, zu einer längeren Erklärung anzusetzen, die hier übersprungen wird (Z. 272-290). Er erläutert noch einmal, dass man die Ergebnisse der Würfel paarweise betrachten muss und dabei zu beachten hat, welcher Würfel was würfelt. Eine Begründung für die Wichtigkeit der Reihenfolge der Würfel wird dabei allerdings nicht gegeben. Als der Erfolg der Erklärung ausbleibt, greift Emil zu erklärendem Material. Mit einem grünen und einem weißen Würfel in der Hand gelingt es Lisa schließlich, so die Möglichkeiten zu zählen, wie es von ihr erwartet wird (Z. 290).

Dass sich dennoch kein für sie stabiler Erklärungsansatz für die Mädchen aus der gelernten Technik entwickelt hat, wird in der letzten Sequenz deutlich, in der nach 45 Minuten Belehrung eine leicht anders formulierte Frage sie wieder veranlasst, statt der erlernten Strategie wieder auf den Bedeutsamkeitsansatz überzugehen:

318 E: Gut. - Und bei 10? Wie kommt das, dass Ihr mehr 10 gespielt habt (*deutet auf Häufigkeitstabelle*). Da musst Du uns noch was dazu sagen, warum hast Du hier so viel 10 gespielt. Und wie viel Möglichkeiten hast du denn, die 10 zu spielen? Dass Du das so viel gespielt hast?

319 L: (*flüstert K etwas zu, unverständlich*)

320 K: Was?

321 L: Wann hast Du denn Ronny gekriegt? Wie viel Wochen war er?

322 K: Ähm – was mit 10.

323 L: Siehste, hast Du an ihn gedacht?

324 K: Ja. (*zu E*) Weil wir haben nämlich einen Hund zu Hause, und den haben wir mit acht bis zehn Wochen gekriegt, und da hab ich an ihn gedacht, weil das da so niedlich war. Und deswegen habe ich dann so oft die 10 ge - spielt.

Das zeigt, wie wenig sie sich die Zähltechnik inhaltlich zu eigen machen konnte, weil sie nicht an ihrem Denken aufsetzen konnte.

### *Fazit zum Fallbeispiel*

Diese Szene konkretisiert – neben vielen offensichtlichen Schwierigkeiten in der Gesprächsführung von Seiten der Studenten - in aller Deutlichkeit

## Unthematisierte Überschneidung zugrunde liegender Vorstellungen als Ursache für ausbleibenden Lehrerfolg

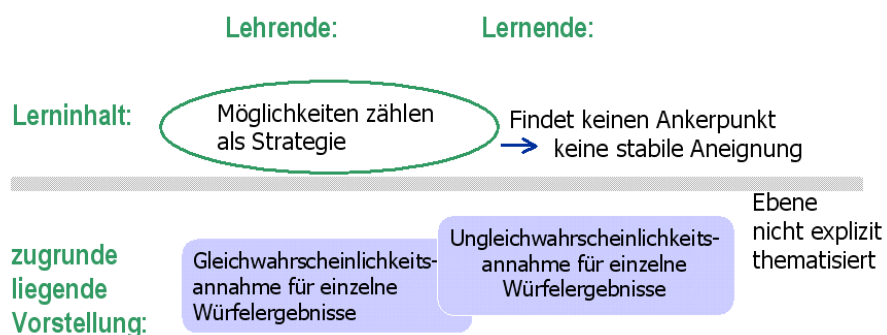


Abb. 5: Zusammenfassende Analyse der Überschneidung im Fallbeispiel

schon in dem kurzen Zeitraum des Gesprächs ein Phänomen, das als langfristiger Effekt in der Literatur zur Didaktik der Stochastik wohl bekannt ist (s.o.):

Die Überschneidung mit unhinterfragten alltäglichen Vorstellungen kann die Aneignung stochastischer Vorstellungen erschweren, wenn sie nicht aufgegriffen und reflektiert werden. Ein Teil des geringen Erfolges des Stochastikunterrichts wird auf dieses Phänomen zurückgeführt (Wolpers/Götz 2002, S. 140).

In dem konkreten Fallbeispiel sollte als Lerninhalt die Strategie des Möglichkeiten-Zählens vermittelt werden (vgl. Abb. 5). Sie basiert auf der Gleichwahrscheinlichkeitsannahme für die einzelnen Würfelergebnisse. Diese überschneidet sich aber mit der von den Mädchen favorisierten Ungleichwahrscheinlichkeitsannahme, über die allerdings nicht kommuniziert wurde. Auf diesem Nährboden konnten die Mädchen sich die Strategie nicht wirklich zu eigen machen. Die Situation wurde dadurch erschwert, dass keinem der vier Beteiligten während des Gesprächs der lernhinderlich Überschneidungseffekt hinreichend bewusst war, so dass nur auf der oberen Ebene kommuniziert werden konnte.

### Über das Fallbeispiel hinaus

Wofür steht nun dieser Fall als Beispiel? Zunächst einmal dafür, dass die vorunterrichtlichen Vorstellungen auch in mathematikbezogenen Lernprozessen tatsächlich eine so große Rolle spielen können, wie das Bild von der Plötze in Fisch ist Fisch aus Abb. 1 suggeriert.

Daraus ergeben sich wichtige Forschungsfragen, die in vielen mathematischen Gebieten relevant sind (vgl. z.B. Prediger 2003):

## Didaktische Strukturierung von Lernarrangements

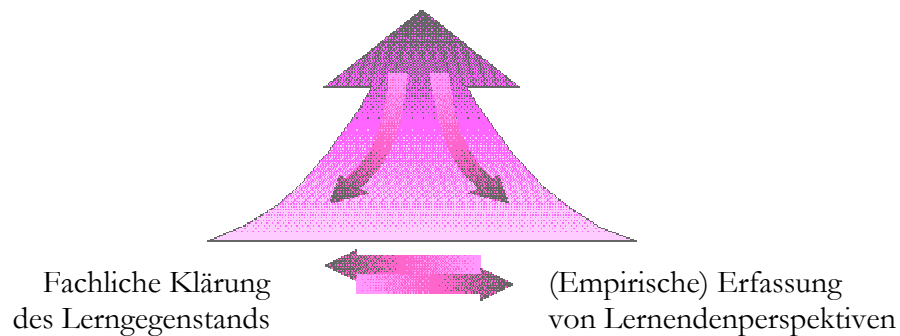


Abb. 6: Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion  
(Kattmann/Duit/Gropengießer 1997)

- Wie gelingt der Übergang von individuellen vorunterrichtlichen Vorstellungen zu fachlich erwünschten Vorstellungen nachhaltig?
- Wie geht man mit evtl. existierenden divergierenden Perspektiven um?

Wie wichtig diese in den Naturwissenschaftsdidaktiken viel diskutierten Fragen auch für Mathematik sind, zeigt z.B. Tatsache, dass es auf der GDM-Tagung 2005 mindestens zwei weitere Vorträge gab (von Sebastian Wartha und Katja Lengnink), die sich (wenn auch mit etwas anderen Vorzeichen) auch mit diesen Forschungsfragen beschäftigt haben.

Die Bremer Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik nähert sich diesen Fragen im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion, einem in den Naturwissenschaftsdidaktiken entwickelter Forschungsansatz (vgl. Kattmann/Duit/Gropengießer 1997). Er nähert sich diesen Forschungsfragen, indem er Lernendenperspektiven und fachliche Perspektiven konsequent zueinander in Beziehung gesetzt. Aus der gewonnen Erkenntnis über die lernförderlichen Korrespondenzen und lernhinderlichen Überschneidungseffekte werden darin dann Konsequenzen für die didaktische Strukturierung von Lernarrangements gezogen werden (vgl. Abb. 6).

Ohne den Forschungsansatz im Einzelnen vorstellen zu können (vgl., dazu das Stochastikbeispiel in Prediger i.V.), sollen mögliche Konsequenzen des Fallbeispiels für die didaktische Strukturierung zumindest angedeutet werden:

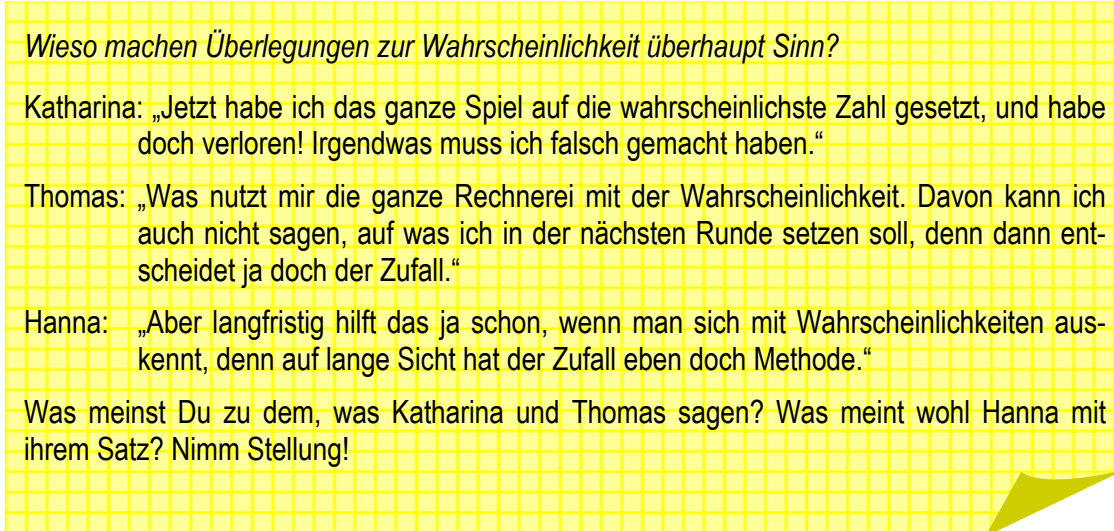
In dem konkreten Fallbeispiel von Karina und Lisa ging es an der Oberfläche um die Strategie des Möglichkeiten-Zählens. Das Zueinander in Beziehung setzen von Lernenden-



Abb. 7: Vorschlag zum Aufgreifen vorunterrichtlicher Vorstellungen (Mathe live 6, S. 71)

perspektive und fachlicher Perspektive zeigte, dass darunter die Diskrepanz lag zwischen Gleichwahrscheinlichkeits-Annahme bzgl. der einzelnen Würfelerggebnisse und der Ungleichwahrscheinlichkeitsannahme.

Für eine didaktische Neustrukturierung der Lernsituation erscheint es



*Wieso machen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit überhaupt Sinn?*

Katharina: „Jetzt habe ich das ganze Spiel auf die wahrscheinlichste Zahl gesetzt, und habe doch verloren! Irgendwas muss ich falsch gemacht haben.“

Thomas: „Was nutzt mir die ganze Rechnerei mit der Wahrscheinlichkeit. Davon kann ich auch nicht sagen, auf was ich in der nächsten Runde setzen soll, denn dann entscheidet ja doch der Zufall.“

Hanna: „Aber langfristig hilft das ja schon, wenn man sich mit Wahrscheinlichkeiten auskennt, denn auf lange Sicht hat der Zufall eben doch Methode.“

Was meinst Du zu dem, was Katharina und Thomas sagen? Was meint wohl Hanna mit ihrem Satz? Nimm Stellung!

Abb. 8: Aufgabe zur Thematisierung des Perspektivwechsels

geboten, diese Diskrepanz konstruktiv aufzugreifen, indem man sie selbst explizit thematisiert. Dieses Ziel verfolgt z.B. die in Abb. 7 abgedruckte Schulbuchaufgabe, an der Schüler ihre vorunterrichtliche Vorstellung explizit reflektieren können, dass die 6 öfter gewürfelt wird als andere Zahlen.

In ähnlicher Weise kann für das zuvor erläuterte Problem der divergierenden Aufmerksamkeitsfokussierung zwischen Einzelergebnis und langer Sicht genau dieser Perspektivwechsel thematisiert werden (vgl. Abb. 8).

Analysen von Schülerlösungen zu der in Abb. 8 abgedruckten Aufgabe zeigen, dass der hier thematisierte Perspektivwechsel selbst am Ende einer Lerneinheit keineswegs allen Lernenden im Bewusstsein ist, so dass die Nutzung solcherart Aufgaben eine wichtige Voraussetzung dafür zu sein scheint, stochastische Denkweisen nachhaltig mit dem individuellen Denken außerhalb des Mathematikunterrichts in Verbindung zu bringen. Denn sie ermöglichen, eine entsprechende Reflexion der Diskrepanzen zwischen stochastischer Perspektive (mit der Aufmerksamkeitsfokussierung auf lange Sicht) und individueller vorunterrichtlicher Perspektive (mit der Aufmerksamkeitsfokussierung auf das Einzelergebnis) anzustoßen.

## Schlussbemerkung

Überschneidungseffekte sind ein wichtiges Phänomen, das nicht nur in der Lerntheorie, sondern auch in der mathematikdidaktischen Forschung und Entwicklung mehr Beachtung verdient. Dabei stellt die Stochastik nur ein Beispielbereich unter vielen dar.

Es bleibt weiteren Forschungs- und Entwicklungsarbeiten vorbehalten, die vorunterrichtliche Vorstellungen von Lernenden konsequent aufzunehmen und Überschneidungssituationen produktiv zu nutzen.

## Transkriptionsregeln

Verbale Äußerungen sind stets in gerader Schrift notiert und gelten ohne weitere Markierung als eindeutig identifiziert und vollständig transkribiert, Auslassungen von gesprochenem Text sind gekennzeichnet. Nonverbale Äußerungen oder Handlungen sind kursiv notiert. Satzzeichen sind nach grammatischen Regeln gesetzt, nicht im phonetischen Sinn oder als spezielle Bedeutungsträger. Ausnahmen bilden folgende Zeichen:

x' Stimme geht am Ende hoch  
- kurze Sprechpause  
x.... wird unterbrochen  
...x unterbricht

Interpretierende Lesehilfe:

6	Ziffer steht für Augensumme (als Summe eines Würfelbildes)	} zwei mal Drei ergibt 6
Zwei	groß geschriebene Zahl steht für Ergebnis eines einzelnen Würfels z.B.:	
zwei	klein geschriebene Zahl steht für Häufigkeitsangabe	

## Literatur

Kurzfassung und Transkriptausschnitt auf meiner Homepage unter Publikationen.

Aufschnaiter, Stefan von u.a. (1992): Kinder konstruieren Welten. Perspektiven einer konstruktivistischen Physikdidaktik, in: Schmidt, S. J. (Hrsg.): Kognition und Gesellschaft, Frankfurt a. M.

Bishop, Alan J. (1994): Cultural conflicts in mathematics education: developing a research agenda, in: For the Learning of Mathematics 14 (2), S.15-18.

Borovcnik, Manfred (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik, BI Wissenschaftsverlag Mannheim.

Duit, Reinders / von Rhöneck, Christoph (1996) (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften, Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften, Kiel.

Fischbein, Efraim (1975): The intuitive sources of probabilistic thinking in children, Reidel, Dordrecht.

Fischbein, Ephraim / Nello, Maria Sainati / Sciolis Marino, Maria (1991): Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents, in: Educational Studies in Mathematics 22(6), S. 523-549.

Fuchs, Walter R. (1966): Knaurs Buch der modernen Mathematik, Knauer, München.

Gerstenmair, J. & Mandl, H., (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspek-

- tive, in: Zeitschrift für Pädagogik, 33, S. 867-888.
- Green, David R. (1983): School pupils probability concepts, in: Teaching Statistics 5(2), deutsche Fassung: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff bei Schülern, in Stochastik in der Schule 3(3), S. 25-38.
- Hefendehl-Hebeker, Lisa (2003): Didaktik der Stochastik I: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vorlesungsausarbeitung, Duisburg.
- Kattmann, Ulrich / Duit, Reinders / Gropengießer, Harald / Komorek, M. (1997): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung, in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 3 (3), S. 3-18.
- Lionni, Leo (1970): Fisch ist Fisch, Middelhauve, Köln.
- Maier, Hermann / Schweiger, Fritz (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht, oebv und hpt Verlagsgesellschaft, Wien.
- Malle, Günther / Malle, Sonja (2003): Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?, in: Mathematik lehren 118, S. 52-56.
- Nunes, Terezinha / Schliemann, Analucia Dias / Carraher, David William (1993): Street mathematics and school mathematics, Cambridge University Press, New York.
- Prediger, Susanne (2003): Brüche bei den Brüchen – Bildungschancen nutzen durch Auseinandersetzung mit epistemologischen Denkhürden, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim, S. 509-513.
- Prediger, Susanne (2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 6, Profil Verlag, München/Wien, S. 154 ff.
- Prediger, Susanne (in Vorbereitung): „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik, eingereicht.
- Vollrath, Hans-Joachim (1978): Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben, in: Lorenz, Holger (Hrsg.): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis, Aulis, Köln, S. 57-73.
- Winter, Heinrich (1976): Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6), in: Didaktik der Mathematik 1, S. 22-37.
- Wollring, Bernd (1994) Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern, Habilitationsschrift, Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.
- Wolpers, Hans / Götz, Stefan (2002): Didaktik der Stochastik, Bd. 3 der Reihe Tietze/Klika/Wolpers (Hrsg.): MU in der Sekundarstufe II, Vieweg, Braunschweig.