

# „Was hat die Exponentialfunktion mit mir zu tun?“ Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht

Susanne Prediger

Erschienen in: K. Lengnink, F. Siebel (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft 4, Mühlthal 2005. S. 97-110.

**Zusammenfassung:** Nachdenklichkeit ist für gebildete Menschen ein wichtiges Charakteristikum, wie Hartmut von Hentig herausgestellt hat. Doch zu selten gelingt es im Mathematikunterricht, Lernende an echte Nachdenklichkeit heranzuführen, weil Vordergründiges oder Technisches im Mittelpunkt steht. In dem Beitrag sollen Beispiele und Wege aufgezeigt werden, dem Ideal der Nachdenklichkeit näher zu kommen. Wichtig ist dabei nicht nur die gezielte Anregung von Reflexion auf unterschiedlichen Ebenen, sondern auch die Entwicklung einer Fragehaltung. Dazu werden Zugänge über Sinn- und Selbstreflexion vorgestellt.

## Einleitung

Nicht erst seit den wenig überraschenden PISA-Ergebnissen wird immer wieder diagnostiziert, der deutsche Mathematikunterricht sei viel zu stark orientiert an Routineaufgaben, am mehr oder weniger geistlosen Abarbeiten von Schemata, während intellektuell anspruchsvollere Fähigkeiten zu wenig gefördert würden. Statt dessen muss sich der Mathematikunterricht um geistig anspruchsvollere Problemstellungen bemühen. Dass diese Diskussion für andere Unterrichtsfächer in ähnlicher Weise geführt wird, zeigt folgendes, auf alle Fächer bezogenes Zitat der didaktischen Leiterin der Laborschule Bielefeld:

„Eines der für uns beschämendsten Ergebnisse aus TIMSS und PISA ist die Tatsache, dass deutsche Schülerinnen und Schüler zwar Routineaufgaben lösen können, aber versagen, wenn es um selbständiges Denken geht. [...] Wir brauchen einen anderen, eben nachdenklicheren Unterricht.“ (van der Groeben 2002, S. 45)

Dabei meint sie mit nachdenklichem Unterricht einen, der Lernende „herausfordert und ermutigt [...], sich handelnd, experimentierend, prüfend, forschend, urteilend Neues zu erschließen, sich den Anforderungen der Sache zu stellen, sich daran ab-zuarbeiten.“ (van der Groeben 2002, S. 45).

Zwar ist Deutschland weit davon entfernt, einen solchen Unterricht flächendeckend anzubieten, gleichwohl gibt es erprobte Ansätze, die das Nachdenken oder Reflektieren im Unterricht aller Fächer stärker in den Vordergrund rücken. Einige mathematikdidaktische Ansätze sollen in diesem Beitrag vorgestellt und um den wichtigen Aspekt der Entwicklung einer nachdenklichen Haltung ergänzt werden: Die bestehenden Konzepte zur Reflexion fokussieren stark auf die *Tätigkeit* des Nachdenkens und auf die dahinter stehende intellektuelle *Fähigkeit*. Dagegen wird die *Haltung* der Nachdenklichkeit meist zu wenig beachtet. Gemeint ist damit eine Grundhaltung, die geprägt ist durch „Wachheit für Fragen“ (von Hentig 1996), d.h. die Bereitschaft und das Zutrauen, aus eigenem Antrieb Fragen zu stellen und Antworten zu suchen. Doch ist gerade eine solche Geisteshaltung der Nachdenklichkeit eine wichtige Bedingung für Bildungsprozesse, wie von Hentig prägnant

formuliert hat:

„Bildung ist eine Geistesverfassung, Ergebnis eines nachdenklichen Umgangs mit den Prinzipien und Phänomenen der eigenen Kultur“ (von Hentig 1980, zit. nach Bauer 1990, S. 6)

Dass eine solche Nachdenklichkeit auch für *mathematische* Bildung von großer Bedeutung ist, zeigt z.B. die Konzeption von „mathematischer Grundbildung“, die als normative Orientierung der PISA-Studie zugrunde liegt (treffender ist der englische Ausdruck „mathematical literacy“):

„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierenden Bürger entspricht.“ (PISA 2000, S. 47)

Wenn dieses Bildungskonzept ernst genommen werden soll, dann muss sich Mathematikunterricht nicht nur um geistig anspruchsvollere Problemstellungen bemühen, wie es bisher vor allem diskutiert wird, sondern auch um mehr Nachdenken *über* Mathematik und ihre Rolle als Zugang zur Welt. Das stellt die Bedeutung des unmittelbaren fachlichen Anspruchs, mathematische Begriffe, Verfahren und Methoden zu erwerben, keineswegs in Abrede, betont aber die bisher oft vernachlässigte Ebene der Reflexion über die mathematischen Inhalte und ihre Bedeutung.

Ein solches Philosophieren kann jedoch nur gelingen, wenn die Lernenden sich die Fragen wirklich zu eigen machen. Dieser Gedanke soll in den folgenden Abschnitten ausgeführt werden. Dazu sollen im ersten Abschnitt Ebenen des Nachdenkens unterschieden werden, um deutlich zu machen, dass Nachdenken im Kleinen beginnen kann. Im zweiten Abschnitt werden existierende Ansätze zur Anregung von Reflexion kurz zusammengetragen. Im dritten bis fünften Abschnitt wird dann der Hauptgedanke des Beitrags entwickelt, wie Nachdenklichkeit durch Einbeziehung von Selbst- und Sinnreflexion gefördert werden kann.

## 1. Ebenen des Nachdenkens im Mathematikunterricht

Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht anregen soll hier bedeuten, *Nachdenklichkeit in Bezug auf Mathematik* anzuregen. Zwar kann und soll z.B. als Beitrag zur demokratischen Erziehung im Rahmen von Mathematisierungen im Unterricht auch über wirtschaftlich-politische Zusammenhänge nachgedacht werden (vgl. dafür etwa Skovsmose 1998), doch sind solche Inhalte nicht Gegenstand dieses Beitrags.

Die hier gestellte Forderung nach mehr Reflexion in Bezug auf Mathematik wird zwar selten grundsätzlich abgelehnt, gleichwohl stößt man mit ihr sowohl bei Praktikern als auch bei Theoretikern im Mathematikunterricht oft auf Bedenken oder Abwehr. Begründet werden die Bedenken mit dem Hinweis auf die intellektuelle Überforderung der Schüler/innen („das ist den meisten doch zu anspruchsvoll“) oder dem Verweis auf fehlende fachliche Grundlagen. („Bevor wir das machen können, müssen die erst mal die einfachen Fertigkeiten beherrschen, denn sonst wissen sie gar nicht, worüber sie reden sollen.“). Dahinter steht das Missverständ-

nis, dass mit Reflexion immer wissenschaftstheoretische Überlegungen oder metamathematische Diskussionen gemeint sind.

Doch Nachdenken muss nicht immer gleich an den ganz großen Fragen ansetzen, sondern kann im Kleinen beginnen und sollte unbedingt parallel mit den Stoffinhalten entwickelt werden, wie Michael Neubrand schon vor fünfzehn Jahren herausgestellt hat (1990). Angesichts der großen Spannweite von möglichen Inhalten des Reflektierens ist es hilfreich, die Fülle möglicher Fragestellungen zu ordnen. Dazu hat sich Neubrands Einteilung in vier Ebenen des Sprechens und Nachdenkens über Mathematik als zweckmäßig erwiesen (Neubrand 1990), die hier zur Verdeutlichung anhand beispielhafter Fragen konkretisiert werden:

Wissenschaftstheoretische Ebene:

- Welcher Natur sind die mathematischen Gegenstände?
- Was kann man durch die mathematische Brille sehen, wo sind ihre Grenzen?

Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens:

- Wozu interessiert man sich für die logischen Abhängigkeiten zwischen Eigenschaften von Folgen? Was gewinnt man durch lokale Ordnung?
- Welche Zusammenhänge zwischen Daten kann ich durch die Standardabweichung erfassen? Welche nicht?
- Ist diese Mathematisierung der Problemstellung angemessen?

Ebene des bewussten Handwerkens:

- Wie sind wir vorgegangen? Welche Strategie ist hier am geeignetsten? Welche Idee steckt dahinter?
- Was sind die relevanten Begriffe, Sätze und Verfahren?
- Welche Gesetzmäßigkeiten rechtfertigen diese Gleichungsumformung?

Ebene der mathematischen Gegenstände und Inhalte:

- Was macht exponentielles Wachstum aus?
- Wurde die Rechenregel, das Beweisschema richtig angewandt?

Eine solche Liste zeigt, dass es viele Zwischenstufen zwischen algorithmischem Rechnen und wissenschaftstheoretischem Philosophieren gibt, die jede ihre wichtige Funktion im Bildungsprozess einnimmt. Insbesondere mit neuen Lerngruppen beginnt man im Mathematikunterricht möglichst auf den unteren Ebenen, d.h. der der mathematischen Gegenstände und der des bewussten Handwerkens. Eine typische Tätigkeit auf der Ebene des bewussten Handwerkens ist die von Polya (1949)

geforderte Rückschau auf eine Aufgabe oder die etwas größere Rückschau am Ende einer Lerneinheit: „Was war das Wesentliche, und wie hängen die einzelnen Inhalte zusammen?“ (vgl. Prediger 2003a).

Nachdenklicher Mathematikunterricht sollte sich aber nicht in den ersten beiden Ebenen erschöpfen, denn die Auseinandersetzung mit Fragen der dritten und vierten Ebene haben für mathematische Bildung eine große Bedeutung (vgl. dazu Lengnink/Prediger 2000). Stärker noch als bei den Reflexionen auf den unteren Ebene stellt sich hier die methodische Frage, wie es gelingt, Nachdenklichkeit über solcherart Fragen anzuregen.

## 2. Existierende Ansätze zur Anregung von Reflexion

Nachdenklichkeit vermitteln, wie soll das gehen? Die kurze Antwort lautet: gar nicht! Zwar können gewisse Inhalte des Nachdenkens im direkten Sinne vermittelt werden, indem man Antworten auf einige der angedeuteten Fragen lernen lässt. Die Grundhaltung der Nachdenklichkeit dagegen lässt sich nicht einfach „beibringen“. Freudenthal formuliert diese Einsicht in seinem Artikel „Mathematik – eine Geisteshaltung“ (1982) so:

„Eine Geisteshaltung [und das soll Mathematik sein] lernt man aber nicht, indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat. Man lernt sie im Tätigsein, indem man Probleme löst.“ (Freudenthal 1982, S. 142)

Doch auch, wenn es keine unmittelbaren Vermittlungsmöglichkeiten gibt, können Lehrkräfte gezielte Angebote machen, die zum Nachdenken über Mathematik anregen. Dies kann langfristig zum Aufbau einer entsprechenden Haltung beitragen. In der didaktischen Theorie und Praxis existieren dazu bereits einige Ansätze und Konzepte, insbesondere die sokratische Methode nach Nelson (Loska 1995) oder Neubrands Konzept des Sprechens über Mathematik (1990).

In der aktuellen didaktischen Diskussion zur Weiterentwicklung der Unterrichtskultur liegt ein großer Schwerpunkt auf der Entwicklung offener und reflexionsorientierter *Aufgaben*. Dahinter steht die Hoffnung, über die Aufgabenkultur am direktesten die Unterrichtskultur verändern zu können (Henn 1999). Dabei werden insbesondere die folgenden Aufgabenformate herangezogen (die in Klammern genannten Beiträge stehen z.T. stellvertretend für eine große Vielfalt an Vorschlägen):

- offene Aufgaben mit mehreren Lösungswegen oder ohne vorgegebene Fragestellung (Winter 1988, Blum/Wiegand 2000)
- offene Mathematisierungsaufgaben (Böer 2000)
- „Die etwas andere Aufgabe“ (Herget/Scholz 1998)
- kognitionsorientierte Aufgaben (Kaune 2001a,b)
- Fehlersuchaufgaben, „Nimm Stellung“ (Herget/Scholz 1998)

Eine Systematisierung und solide Analyse, was die einzelnen Aufgabentypen leisten können, hat Christa Kaune im Rahmen des Osnabrücker DFG-Projekts „Analyse von Unterrichtssituationen zum Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der S1“ vorgestellt (Kaune 2001a).

Aufgaben in dem vorgestellten Tenor leisten einen wichtigen Beitrag, um Fragen auf den vorhin genannten Ebenen überhaupt als Unterrichtsgegenstand auftauchen zu lassen. Aus diesem Grund ist eine Veränderung der Aufgabenkultur eine wichtiger Schritt in Richtung auf mehr Reflexion, denn in Aufgaben explizit formulierte Fragestellungen haben im Bewusstsein der Lernenden ein größeres Gewicht als nur mündlich im Unterricht aufgebrachte Zusatzfragen. Daher ist es sehr zu begrüßen, dass solcherart Aufgabenformate auch in Schulbüchern der neuen Generation Einzug erhalten (z.B. in das Lehrwerk *Neue Wege* des Schroedel Verlags), und auch in die Prüfungskultur eingehen. Denn „Kommt das auch in der Arbeit dran?“ ist für Schülerinnen und Schüler nach wie vor ein wichtiges Kriterium zur Entscheidung über Relevanz eines Lerninhaltes.

Durch Veränderung der Aufgaben und der im Unterricht behandelten Fragestellungen allein wird jedoch ein wichtiges Problem nicht gelöst: Echte Nachdenklichkeit beinhaltet nicht nur, auf Fragen der Lehrkraft zu antworten, sondern selbst eigene Fragen sowie das Bedürfnis und Zutrauen zu haben, ihnen gründlich nachzugehen. Eine reine Veränderung der Aufgabenkultur würde dem traditionellen Muster folgen, dass Lernende auf Fragen antworten, die sie selbst nicht gestellt haben, und auf die die Lehrkraft im Zweifelsfall die bessere Antwort weiß.

Zwar hat also die Aufgabenkultur eine wichtige Funktion, um überhaupt entsprechende Themen zu etablieren, doch bleibt es ein entscheidendes didaktisches Anliegen, dass Schülerinnen und Schüler sich die Themen zu eigen machen und *selbst* zu fragen beginnen.

Dies betrifft auch das Problem der Motivationslage: Man sollte nicht davon ausgehen, dass alle Schülerinnen und Schüler wirklich nachdenken wollen, zumal dies im Zweifelsfall anstrengender ist als das Abarbeiten von Schemata. Um so dringender ist die Frage, wie sich die Bereitschaft zur Nachdenklichkeit eigentlich aufbauen lässt. Denn nur dann wäre es angemessen, von einer Haltung der Nachdenklichkeit zu sprechen. Zusammenfassend:

*These 1: Nachdenklich sein heißt eigene Fragen stellen und ihnen nachgehen.*

### **3. Prinzip des situativen Aufgreifens von Reflexionschancen**

Stärker noch als durch die Aufgabenkultur wird eine solche Haltung durch eine offene, vertrauensvolle Unterrichtskultur gefördert, in der Schülerfragen explizit erwünscht sind, mit Fehlern konstruktiv umgegangen und Neugier und Interesse aufgebaut wird. Martin Winter hat die Bedeutung der Unterrichtskultur stark hervorgehoben, damit sich „Schülerinnen und Schüler die Probleme zu ihren eigenen machen“ (1997), und in den neueren Bestrebungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts spielt das Stichwort Unterrichtskultur zu Recht eine zentrale Rolle (vgl. z.B. Henn 1999). Für den hier diskutierten Zusammenhang geht es dabei vor allem um die Arten des Umgangs, Kommunikationsstile, aber auch um Sozialformen, denn Gruppenarbeit ist tendenziell eher dazu geeignet, viele Lernende gleichzeitig zum aktiven Nachdenken anzuregen als der traditionelle fragend-entwickelnde Unterrichtsstil, in dem zu schnell die Interaktionslogik die Sachlogik

abzulösen droht (Voigt 1984). Insgesamt gilt es also, eine Lernsituation zu schaffen, die Raum gibt für eigene Fragen der Schülerinnen und Schüler.

Es sind aber nicht nur die explizit gestellten Fragen der Lernenden, die man aufgreifen sollte. Denn oft ergibt sich auch eine Chance zu einem Gespräch an einer Stelle, die weder die Lehrkraft voraussehen konnte noch die fragende Person. Solche Chancen für ein nachdenkliches Gespräch konsequent aufzugreifen, habe ich als Prinzip des situativen Aufgreifens von Reflexionschancen beschrieben (Prediger 2001). Es soll an einem Beispiel erläutert werden:

„Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemäßer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch  $\frac{1}{4}$  dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt‘!

Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das (im Bereich positiver Zahlen) bei Division durch Zahlen, die kleiner als 1 sind, so sein muß. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel‘ teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen ‚teilen in‘ und ‚teilen durch‘ hin.

Abschließend meinte sie: ‚Okay, ich weiß jetzt, wie man das rechnen muß. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, daß man in Mathematik logisch denkt!‘“ (Heymann 1996, S. 206)

Heymann hat in seiner Interpretation herausgestellt, dass das Problem dieser Situation in Katharinas Grundvorstellung von Dividieren liegt, die nicht übereinstimmt mit der der Mathematiker. Für sie ist Dividieren verbunden mit der Grundvorstellung des Aufteilens, des Teilens durch eine Anzahl Personen, notwendig dagegen wäre hier z.B. die Vorstellung des „Passens in“. Ihr diese Grundvorstellung nahe zu bringen, hätte ihr ermöglicht, etwas mehr Verständnis für die „unlogisch denkenden“ Mathematiker aufzubringen. Darüber hinaus bietet ihre Irritation jedoch eine sehr gute Gelegenheit, um über den Sinn einer solchen Verallgemeinerung von Operationen zu sprechen: Wozu eigentlich erweitern Mathematiker die Grundvorstellungen zu mathematischen Operationen?

Wenn dies gelingt, wäre aus Katharinas Irritation über die Denkweisen der Mathematiker eine echte Reflexionschance erwachsen, mit der ein Nachdenken auf der Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens angestoßen werden kann. (Ein ähnliches Beispiel gibt Hefendehl-Hebeker 1995, S. 49).

In einem Unterricht, der sich die Etablierung von Nachdenklichkeit zum Ziel setzt, sollten solche Anlässe nicht verschenkt werden. Und nicht nur, weil man eine interessante Überlegung in Bezug auf Mathematik verpasst, sondern weil es in einer nachdenklichen Unterrichtskultur die Lernenden erfahren sollen, wie ernst man ihre Fragen und Diskussionen nimmt. Nur dadurch werden sie ermutigt, weiter Fragen zu stellen. Gerade für Reflexionen auf höheren Reflexionsebenen, also der wissenschaftstheoretischen Ebene oder der des Hinterfragens mathematischen Arbeitens, sind solche situationsgebundenen Anbindungen an die Fragen der Lernenden wichtig, um die Reflexionen im eigenen Denken der Lernenden zu verankern.

Auch wissenschaftstheoretische Überlegungen ergeben sich oft situativ, wenn man nur die sich ergebenden Möglichkeiten aufgreift, wie z.B. im Unterricht meiner Kollegin, in dem sich im Zusammenhang mit Lösungen Linearer Gleichungssysteme eine Diskussion entspann, ob es Geraden gibt, die sich gar nicht schneiden. Während eine Schülerin sofort das Stichwort Parallele nannte, bestand ein an-

derer Schüler darauf, dass man faktisch keine Parallelen malen kann. Diese Auseinandersetzung ist eine gute Vorlage für die in der Philosophie der Mathematik sehr wichtige Frage, von welcher Natur eigentlich die Objekte sind, über die man in der Mathematik redet: Geht es um die real hingezeichneten Parallelen, oder geht es um die gedachten, idealisierten mathematischen Objekte?

Gestützt wird das hier postulierte Prinzip des situativen Aufgreifens von Reflexionschancen durch ein interessantes empirisches Ergebnis: In einer Untersuchung von Lernsituationen hinsichtlich der Bedingungen der Entstehung von Interesse konnte gezeigt werden, dass situationales Interesse vorrangig in solchen Situationen aufkommt, in denen die Lehrkräfte auf die individuellen Denkweisen der Schüler/innen eingehen, und man an ihren Gedanken arbeitet, nicht an den regulären mathematischen Begriffen (Bikner-Ahsbahs 2002).

#### 4. Zugänge durch Betroffenheit

Situativ aufgreifen kann eine Lehrkraft jedoch nur die Fragen der Lernenden, die sie als sie Reflexionschance identifizieren kann. Um die dazu notwendige Sensibilität zu entwickeln, ist es notwendig, verschiedene mögliche Formen des Nachdenkens ausmachen zu können. Diese Formen stellen gleichzeitig unterschiedliche Zugänge zu nachdenklichen Fragestellungen dar. Für eine solche Suche nach möglichst vielschichtigen Formen des Nachdenkens ist ein breit angelegtes Konzept von Reflexion nötig, das die Personen und die Bedeutungsebene stärker einbezieht. Hilfreich ist dazu Bauers Unterscheidung von vier Formen mathematikbezogener Reflexion:

1. Inhaltsreflexion; d.h. ein „auf mathematische Inhalte und Themen sich richtendes bewusstes, prüfendes Nachdenken und Überlegen, ein sich Vertiefen in Mathematik, [...], ein verständiges Betreiben von Mathematik“
2. Gegenstandsreflexion d.h. die „Reflexion über Entwicklungslinien, Strukturmerkmale, Erscheinungsformen, Grundlagenfragen der Mathematik. Die Reflexion richtet sich auf das Wesen der Disziplin Mathematik.“
3. Bedeutungs- und Sinnreflexion, d.h. „Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischen Denkens, über die Bedeutung der Mathematik und über den Sinn einer Beschäftigung mit Mathematik. Im Zentrum stehen dabei Bedeutungseinheiten, Zweckbezüge, Sinnzuschreibungen.“
4. Selbstreflexion, d.h. Reflexion über die Bedeutung des Gegenstandes Mathematik für die eigene Person: Sie „betrachtet, analysiert, prüft auf einer Metaebene die eigene Beziehung zur Mathematik.“  
(nach Bauer 1990, S. 6/7)

Während die Unterscheidung der ersten beiden Formen mit Neubrands Ebenen-Einteilung kohärent ist, liegen die anderen beiden Formen quer dazu, weil Bauer nicht wie Neubrand im Hinblick auf das Fach, sondern im Hinblick auf die Beziehung von Fach, Mensch und Welt systematisiert.

Die Dimensionen der Selbstreflexion und die der Sinnreflexion sind im deutschen Mathematikunterricht in der Breite kaum etabliert. Es herrscht nicht einmal Konsens, dass sie dort auftauchen sollten; zuweilen haben Lehrkräfte Sorge, den Schüler/innen zu nahe zu treten und sich andererseits auf ein Feld zu begeben, in

dem die gewohnten Kategorien von richtig und falsch nicht greifen. Gerade deswegen soll hier nachdrücklich für diese Dimensionen der Reflexion geworben werden, denn fragt man sich, in welchen Bereichen der Reflexion die Lernenden wirklich Betroffenheit verspüren, so kommt man zur zweiten wichtigen These dieses Beitrags:

*These 2: Für die Entwicklung einer Haltung der Nachdenklichkeit sollte bei den Lernenden insbesondere die Selbst- sowie die Bedeutungs- und Sinnreflexion angeregt und gefördert werden, denn eigene Fragen setzen authentische Betroffenheit voraus.*

Diese These ist nicht exklusiv zu verstehen, denn es gibt auch natürlich Nachdenklichkeit ohne Selbstreflexion. Einige, nachdenkliche Schüler/innen wenden sich auch gerne und erfolgreich der Inhalts- und Gegenstandsreflexion zu. Für diese Personen stellen sich Fragen auf der Ebene der Selbstreflexion oft nicht, weil sie ihr Verhältnis zur Mathematik als unproblematisch erfahren. Wie aber erreicht man diejenigen Lernenden, die nachdenken vermeiden, weil sie nicht wollen oder es sich in Mathematik nicht zutrauen (und beide Gruppen sind wichtig)? Für sie lassen sich Wege zur Nachdenklichkeit eher über Selbst- oder Sinnreflexion finden. Denn „Wozu sollen wir das lernen?“ und „Was hat das mit mir zu tun?“, das fragen auch sie.

Oft werden diese Fragen im Unterricht als Demotivation zeigende Störungen empfunden, und in einigen Fällen sind sie auch so gemeint. Dennoch zielt die Mehrzahl unmittelbar in den Kern wichtiger Lerninhalte. Viel wäre daher im Unterricht zur Entwicklung von Nachdenklichkeit schon erreicht, wenn den Schüler/innen diese natürlichen Fragen nicht abgewöhnt würden. Nimmt man die Fragen auf statt sie abzuwehren, so bieten sie zuweilen gute Reflexionsanlässe, und hier kann dann echte Nachdenklichkeit ansetzen.

Welche wichtige Rolle Sinnreflexion für mathematische Bildung spielt, hat Roland Fischer immer wieder betont. In seinem Konzept zur höheren Allgemeinbildung benennt er Selbst- und Sinnreflexionen als zentralen bildenden Diskussionsgegenstand:

„Subjektive Einschätzungen von Lehrern und Schülern müssen eine Rolle spielen. Gerade im Prozess der Auseinandersetzung mit dem Vorgesprochenen im Stellen der Frage: „Was bedeuten die Inhalte für mich, was bedeuten sie für die Gesellschaft, was bedeuten sie für uns als Lerngemeinschaft (als Zwischenglied)?, vollzieht sich Bildung.“ (Fischer o.J., S. 11)

Denn aus Fischers Sicht sind Sinn-Diskussionen die authentischsten Reflexionsanlässe überhaupt. Dabei muss allerdings die Sinnfrage ernstgenommen und nicht nur auf vordergründige Nützlichkeit bezogen werden (Fischer 1982).

Noch weniger als die Sinnreflexion ist Selbstreflexion im Mathematikunterricht bisher etabliert. Eine Ursache ist darin zu vermuten, dass sich in dem weitgehend entpersonalisierten Fach (Bauer 1988) Unterrichtskonzepte mit explizit individuellen Zugängen zur Mathematik erst langsam durchsetzen (viel Beachtung haben etwa die Ansätze von Gallin und Ruf gefunden, 1990). Entgegen der Geschichtsdiaktik, in der die individuelle Bedeutung des zu Lernenden als zentrale didaktische Kategorie diskutiert wird (Thurn 1993), ist in Mathematik daher bisher zu wenig Raum für eine Aushandlung des Verhältnisses von Individuum und Mathematik.

Daher soll im nächsten Abschnitt an Beispielen aufgezeigt werden, wie sich aus Fragen nach Sinn und individueller Bedeutung Reflexionschancen ergeben können.

## 5. Zugänge zur Nachdenklichkeit über Sinn- und Selbstreflexion - Zwei Beispiele

Schülerinnen und Schüler stellen die Frage nach der individuellen Bedeutung oft in sehr unspezifischer Weise: „Was hat die Exponentialfunktion mit mir zu tun?“ oder „Wozu braucht man denn exponentielles Wachstum?“. Auf so formulierte generelle Fragen lassen sich kaum überzeugende direkte Antworten finden. Daher sollte ein Unterricht, der zur Nachdenklichkeit erziehen will, solche pauschalen Fragen in kleinere Fragen ausdifferenzieren und so eine Auseinandersetzung darüber ermöglichen. Aus den allgemeinen Fragen die konkreteren herauszuschälen, ist eine Fähigkeit, die Schüler/innen erst erwerben müssen (bezogen auf rein stoffliche Aspekte hat dies auch Goldberg 1990 betont). Unterstützen kann man sie in diesem Lernprozess zum einen durch Aushandeln, was sie genau meinen, zum anderen, indem solche Fragestellungen immer wieder angeboten werden als Prototypen für eigenständige Ausdifferenzierungen.

Ebenso wie bei der Inhaltsreflexion sollte daher die Sinn- und Selbstreflexion sich auf verschiedenen Ebenen bewegen können und nicht immer gleich auf einem sehr hohen Reflexionsgrad einsetzen. Hier unterscheidet sich dieser Ansatz grundsätzlich von Bauer, der Selbst- und Sinnreflexion auf einem sehr hohen Level ansiedelt und dann warnt, man dürfe die tiefen philosophischen Fragen nicht zu oft angehen, um diese Themen nicht überzustrapazieren (Bauer 1990, S. 8). Dagegen wird hier davon ausgegangen, dass auch Sinn- und Selbstreflexion auf allen vier Neubrand'schen Ebenen angesiedelt sein sollten, je nachdem, welche der Situation gerade angemessen ist.

Um zu illustrieren, was Sinnreflexion auf der Ebene der mathematischen Gegenstände sein kann oder Selbstreflexion auf der Ebene des bewussten Handwerkens soll die Tabelle dienen: Darin sind für den Themenbereich exponentielles Wachstum beispielhaft Fragestellungen zusammengestellt und geordnet, die das Nachdenken über exponentielles Wachstum auf verschiedenen Ebenen und mit verschiedenen Zugängen anregen können. Gegenstands- und Inhaltsreflexion wurden zu einer Spalte zusammengefasst, denn die Unterscheidung zwischen den beiden Zugängen ergibt sich in den Zeilen. Die Tabelle soll nicht verstanden werden als Kanon, der Kästchen für Kästchen abgearbeitet werden soll, sondern als Spektrum von beispielhaften Bereichen, in denen sich Nachdenken über exponentielles Wachstum bewegen kann.

Auch wenn die konkrete Zuordnung nicht eindeutig ist, wird an diesem kleinen Beispiel deutlich, dass jedes Feld einer solchen 12-Felder-Tafel eine eigene Rolle im Lernprozess spielt und mit fruchtbaren Fragen gefüllt werden kann.

	Gegenstands- und Inhaltsreflexion	Bedeutungs- und Sinnreflexion	Selbstreflexion
Ebene der mathematischen Gegenstände und Inhalte	Was ist exponentielles Wachstum? Was sind die Unterschiede zu anderen Wachstumsformen? Wie lautet die Funktionsvorschrift?	Wo kommen exponentielle Wachstumsprozesse im Alltag vor? In welchem Sinne geht es bei exponentiellem Wachstum um gleichmäßiges Wachstum?	Wo habe ich Schwierigkeiten mit dem Begriff des exponentiellen Wachstums? Was fällt mir leicht? Wieso?
Ebene des bewussten Handwerks	Wie kann man exponentielles Wachstum in den versch. Repräsentationsformen (Wertetabelle, Graph, Formel, verbale Beschreibung) darstellen bzw. identifizieren?	Was hilft es, einen Prozess als exponentiell zu identifizieren? Was bringt (mir) die Beschreibung von Wachstum mit unterschiedlichen Repräsentationsformen? Was die Funktionsvorschrift?	Berichtigung der Klassenarbeit: „Was ich hier eigentlich gedacht hatte, war... Das entspricht nicht der mathematischen Vorgehensweise, weil...“
Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens	Was sind Chancen und Grenzen der Erfassung realer Wachstumsprozesse durch Exponentialfunktionen? (Stichwort Prognosen)	Wieso will man (soll ich) überhaupt Wachstumsprozesse mit mathematischen Funktionen erfassen? Wo ist dies nicht bedeutsam?	Was hat mein Denken über und meine Erfahrung mit Wachstumsprozessen mit ihrer mathematischen Erfassung zu tun? Welche Vorstellung von Gleichmäßigkeit habe ich, welche ist hier erfasst?
Wissenschaftstheoretische Ebene	Wo wird Mathematik hier als Mittel zur Beschreibung von Realität genutzt, wo wird Realität geschaffen?	Welche Rolle nimmt Mathematik in der Gesellschaft ein, wenn mit Exponentialfunktionen prognostiziert wird?	Welche Auswirkungen hat die gesellschaftliche Verwendung dieser mathematischen Mittel für mich?

**Wege zum Nachdenken auf vier Ebenen  
an Beispielen zum exponentiellen Wachstum**

In der linken Spalte stehen klassische Bildungsinhalte zum Thema exponentielles Wachstum auf den einzelnen Reflexionsebenen, die inzwischen in einigen Unterrichtskonzepten thematisiert werden. Doch wie kann es gelingen, dass die Lernenden sich diese Fragen zu Eigen machen? Um einen individuellen Zugang anzubieten, sind Fragen vom Typ der zweiten und dritten Spalte hilfreich. Sie stellen zum Teil Umformulierungen der ersten Spalte dar, zum anderen sind sie ausdifferenzier-

te Präzisierungen der zu allgemeinen Frage „Was hat das mit mir zu tun?“ oder „Wozu braucht man das?“.

Wenn Lernende in den Dimensionen der Selbst- und Sinnreflexion erst mal selbst zu fragen beginnen, können sich bei sensiblem Aufgreifen auch Wege zu authentischen eigenen Fragen in der Dimension der Gegenstands- und Inhaltsreflexion ergeben. Fragen z.B. Schüler/innen beim Lösen algebraischer Gleichungen, was das Gleichungsumformen eigentlich mit ihnen zu tun hat, dann ist es zwar im ersten Zugriff gar nicht leicht, jenseits von Anwendungsbeispielen (als Nachweis für den praktischen Nutzen) eine konstruktive Antwort zu finden. Doch verfolgt man die Frage ernsthaft, warum die Lernenden zum regelgeleiteten Umformen keinen persönlichen Zugang finden, so eröffnet sich ein spannendes Feld: Zunächst einmal wird deutlich, dass es gerade ein wichtiges Charakteristikum der algebraischen Umformungen ist, dass sie ohne Interpretationen ablaufen können. Denn nur die Möglichkeit, sie losgelöst von Bedeutungen zu führen, ermöglicht, dass sie rein mechanisch ablaufen (vgl. Krämer 1988). Dieser mechanische Kalkül ist in gewisser Weise „entmenschlicht“, und hat doch gerade darin seine wichtige Funktion, denn er entlastet unser Denken. Erlebbar wird diese Entlastung, wenn man versucht, bei algebraisch gelösten geometrischen Fragestellungen (etwa Flächenveränderungen) alle für die Lösung notwendigen algebraischen Umformungen in dem ursprünglichen geometrischen Kontext zu interpretieren (was nicht heißt, dass das Problem nicht auch geometrische Lösungen hätte), was hier jedoch nicht ausgeführt werden soll.

Und so kann man über eine Selbstreflexion („Wieso gefällt mir das Gleichungsumformen so wenig?“) zu einer fundamentalen Idee der Mathematik vorstoßen, dem Algorithmieren oder noch allgemeiner dem interpretationsfreien Symbolgebrauch (ein möglicher Verlauf eines solchen Gesprächs ist in Prediger 2003b vorgestellt, vgl. auch Fischer 1990).

## **6. Fazit**

Das Anliegen dieses Beitrags lässt sich durch drei Ziele zusammenfassen: Schülerinnen und Schüler sollen im Mathematikunterricht nachdenklich sein dürfen, wollen und können.

### **Nachdenklich sein dürfen**

Damit die Schülerinnen nachdenklich sein dürfen, ist eine Unterrichtskultur notwendig, die dafür Raum lässt. Dies bezieht sich sowohl auf die Interaktionsformen als auch auf die Art, wie Lehrkräfte mit nachdenklichen Einwüfen umgehen. Als zentrales methodisches Mittel haben sich reflexionsorientierte Aufgabenstellungen erwiesen, weil sie Nachdenklichkeit nicht nur erlauben, sondern auch zum offiziellen Lerninhalt machen.

### **Nachdenklich sein wollen**

Nachdenklich sein dürfen allein reicht nicht, denn nicht alle Schüler erhalten sich über ihre Schullaufbahn ihr Fragebedürfnis, das für Kinder so natürlich und wichtig

ist. Wege zur Nachdenklichkeit müssen daher auch anregen, wieder nachdenklich sein zu *wollen*. Damit ist die Haltungsfrage angesprochen, die in diesem Beitrag breiten Raum einnahm. Unterricht soll nicht nur intellektuelle Kompetenzen formen, sondern auch Haltungen, und zwar insbesondere eine Haltung der Nachdenklichkeit.

Wie für jedes wichtige Bildungsziel gibt es auch zur Haltung der Nachdenklichkeit keinen methodischen Königsweg, der Erfolg garantiert. Gleichwohl zeigen unterrichtspraktische Erfahrungen, dass sinn- und selbstreflektierende Fragestellungen einen wichtigen Zugang bieten können, um mehr Lernende zu eigener Nachdenklichkeit anzuregen.

Es geht mit diesem dreifachen Zugang Gegenstands-, Sinn- und Selbstreflexion aber nicht nur um die Motivation zum Nachdenken, sondern auch um eine gezielte Kanalisierung auf ertragreiche Fragen, und das gehört für mich zum dritten Aspekt:

### **Nachdenklich sein können**

Zur angestrebten Haltung muss daher auch eine Kompetenz treten, nämlich die Fragen nach Sinn und individueller Bedeutung so zu präzisieren, dass tragende Antworten gefunden werden können. Eine solche Kompetenz zur Auswahl tragender Fragen nennt der Mathematikhistoriker Breger als Kriterium, an dem man die Experten eines Gebietes erkennen kann (Breger 1992, S. 81). Daran zeigt sich einerseits, dass man die Ansprüche für den Schulunterricht hier nicht zu hoch stecken sollte, andererseits deutet sich damit an, wie wichtig es wäre, die Kompetenzen der Schüler in dieser Hinsicht etwas weiter zu entwickeln, als sie bisher entwickelt sind.

Dass eine solche Kompetenz nur zusammen mit einer Grundlage von soliden Kenntnissen und Fähigkeiten auf der Gegenstandsebene erworben werden kann, soll noch einmal ausdrücklich betont werden, um nicht in den Verdacht zu geraten, über die Meta-Ebene die mathematischen Inhalte aus dem Blick zu verlieren. Insgesamt, so die feste Überzeugung der Autorin, werden die fachlichen Ansprüche durch den hier vorgestellten Ansatz sicherlich eher steigen als fallen.

### **7. Ausblick: Konsequenzen für die Lehrer/innen-Bildung**

Schließen soll der Beitrag mit dem Hinweis auf eine wichtige Vorbedingung des hier skizzierten, nachdenklichen Mathematikunterrichts: Nur diejenigen Lehrkräfte, die selbst die Bereitschaft, den Mut und die Kompetenz zur Selbst- und Sinnreflexion haben, können sich auf dieses Feld begeben. Denn nur wenn eine Lehrkraft selbst zu diesen Reflexionsformen einen Zugang findet, kann sie echte Betroffenheit erzeugen. Eine Veränderung der Unterrichtsrealität wird sich in dieser Beziehung also nur langfristig über eine Veränderung der Sozialisation der Lehrkräfte herstellen lassen, denn Lehrkräfte können nur das als Lernkultur etablieren, was sie selbst erlebt und reflektiert haben. Wege zur Nachdenklichkeit sollten sich daher bereits im Fachstudium eröffnen, und auch hier zeigen Erfahrungen (vgl. Lengnink/Prediger 2000), dass Sinn- und Selbstreflexionen mögliche Zugänge bie-

ten können. Sie in der Breite zu etablieren, ist eine Aufgabe im Zuge der längst überfälligen Veränderungen der universitären Lernkultur.

## Literatur

- Bauer, Ludwig (1988): *Mathematik und Subjekt. Eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht*, Dt. Universitätsverlag, Wiesbaden.
- Bauer, Ludwig (1990): *Mathematikunterricht und Reflexion*, in: *Mathematik Lehren* 38, S. 6-9.
- Bikner-Ahsbahs, Angelika (2002): *Rahmenkonzept für eine auf den alltäglichen Mathematikunterricht bezogene Interessentheorie*, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, Hildesheim, S. 119-122.
- Blum, Werner / Wiegand, Bernd (2000): *Offene Aufgaben – wie und wozu?*, in: *Mathematik Lehren* 100, S. 52-55.
- Böer, Heinz (2000): *Offene und lebensrelevante Aufgaben – nach und trotz TIMSS!*, in: *Mathematik lehren* 100, S. 60-62.
- Breger, Herbert (1992): *Tacit Knowledge in mathematical Theory*, in: Echeverria, Javier / Ibarra, Andoni / Mormann, Thomas (Hrsg.): *The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, de Gruyter, Berlin / New York, S. 79-90.
- Deutsches PISA-Konsortium (2000): *Mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy)*, in: dies.: *Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten*, OECD Programme for international student assessment, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin, S. 47-64.
- Fischer, Roland (1982): *Sinn mathematischer Inhalte und Begriffsentwicklungen im Analysisunterricht*, in: *Journal für Mathematikdidaktik* 3 (3/4), S. 265-294.
- Fischer, Roland (o.J.): *Höhere Allgemeinbildung I und II*, unveröffentlichte Manuskripte, TU Wien.
- Fischer, Roland (1990): *Längerfristige Perspektiven des Mathematikunterrichts*, in: *Mathematica Didactica* 13(2), S. 38-62.
- Freudenthal, Hans (1982): *Mathematik – eine Geisteshaltung*, in: *Die Grundschule* 14 (4), S. 140-142.
- Gallin, Peter / Ruf, Urs (1990): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*, Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998 (erstmalig 1990).
- Goldberg, Elke (1990): *Auch das Fragen will gelernt sein*, in: *Mathematik in der Schule* 28 (7/8), S. 482-490.
- Hefendehl-Hebeker, Lisa (1995): *Mathematik lernen für die Schule?* in: *Math. Semesterberichte* 42, S. 33-52.
- Henn, Hans-Wolfgang (1999) (Hrsg.): *Mathematikunterricht im Aufbruch. Zum Projekt "Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik"* des Kultusministeriums Baden-Württemberg, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart, Schroedel, Hannover.
- Herget, Wilfried / Scholz, Dietmar (1998): *Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. Mathematik-Aufgaben Sek I.*, Kallmeyer, Seelze.
- Heymann, Hans Werner (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*, Beltz Verlag, Weinheim.
- Kaune, Christa (2001a): *Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“*, in: *Der Mathematikunterricht* 35, S. 35-46.
- Kaune, Christa (2001b): *Anleitung zur Kognition über Metamathematik durch geeignete Aufgabenstellungen*, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, Hildesheim, S. 344-347.
- Krämer, Sybille (1988): *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Lengnink, Katja / Prediger, Susanne (2000): *Mathematisches Denken in der Linearen Al-*

- gebra, in: Zentralblatt für Mathematikdidaktik 32 (4), S. 111-122.
- Loska, Rainer (1995): Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung, Klinkhart, Bad Heilbrunn.
- Neubrand, Michael (1990): Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht, in: *mathematica didactica* 13 (1), S. 21-48.
- Neue Wege (2001) Mathematik 5-10, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, Hannover 2001.
- Polya, Georg (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme, Francke, Bern.
- Prediger, Susanne (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz, in: *Journal für Mathematikdidaktik* 22(2), S. 123-144.
- Prediger, Susanne (2003a): Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts, in: *Friedrich Jahresheft: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln*, 2003, S. 93-95.
- Prediger, Susanne (2003b): „Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen?“ Ein Dialog von der geometrischen Deutung eines Lösungsverfahrens für Lineare Gleichungssysteme bis zum „Sinn des sinnlosen Umformens“, in: *Praxis der Mathematik in der Schule* 45 (3), S. 132-135.
- Skovsmose, Ole (1998): Linking Mathematics Education and Democracy, in: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (30) 6, 195-203.
- Thurn, Susanne (1993): „...und was hat das mit mir zu tun?“ Geschichtsdidaktische Positionen, Centaurus, Pfaffenweiler.
- van der Groeben, Annemarie (2002): (Keine) Zeit für Nachdenklichkeit?, in: *Pädagogik* 7-8, S. 44-47.
- Voigt, Jörg (1984a): Der kurztaktige, fragend-entwickelnde Mathematikunterricht. Szenen und Analysen, in: *mathematica didactica* 7(3/4) S. 161-186.
- von Hentig, Hartmut (1980): Die Krise des Abiturs und eine Alternative, Klett, Stuttgart.
- von Hentig, Hartmut (1996): *Bildung*, Carl Hanser Verlag, München.
- Winter, Heinrich (1988): Divergentes Denken und quadratische Gleichungen, in: *Mathematik lehren* 28, S. 54-55.
- Winter, Martin (1997): Wenn Schülerinnen und Schüler die Probleme zu ihren eigenen machen..., in: *Mathematik in der Schule* 35 (11), S. 577-581.