Steffen HAHN & Susanne PREDIGER, Universität Bremen

Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative

Kurzfassung erschienen in: Beiträge zum MU 2004, Franzbecker, Hildesheim, S. 217-220.

> Fabian (4 Jahre) und Benni (5½ Jahre) verbringen die GDM-Tagung 2004 bei ihren Großeltern. Wie bei jedem Besuch werden sie vom Großvater vermessen und ihr Wachstum auf der Messlatte sorgfältig dokumentiert. Des Großvaters Feststellung „Fabian, Du bist mehr gewachsen als Benni." veranlassen Fabian immer wieder, auch in Anwesenheit seines rund einen Kopf größeren Bruders mit Stolz geschwellter Brust zu verkünden: „Papei hat gemessen, ich bin größer als Benni." Wenn Benni dann korrigiert „Nee, nur mehr gewachsen.", nickt Fabian heftig und sagt „Ja, mehr gewachsen."

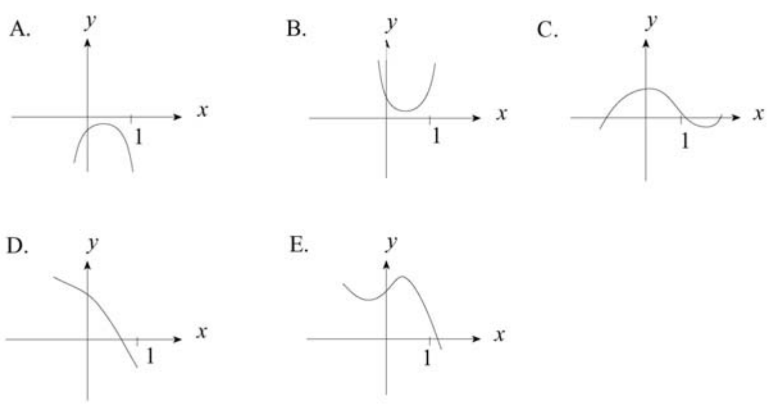
Abstract: Die klassische Kurvendiskussion gilt als Inbegriff des mechanischen Abarbeitens von Schemata ohne inhaltlichen Sinn. Es wurden daher unterschiedliche Vorschläge für stärker realitätsbezogene Funktionsuntersuchungen gemacht, meist durch Behandlung von Optimierungsproblemen oder Ausweitung auf Kurven. Im Vortrag wird argumentiert, wieso dies zwar einen guten Einblick in die Anwendbarkeit des Ableitungskalküls gibt, zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen allein jedoch nicht ausreicht. Stattdessen wird vorgeschlagen, adäquate Grundvorstellungen zunächst an qualitativen Kurvendiskussionen zu entwickeln, d.h. für die Beschreibung von Vorgängen, die nicht exakt quantifiziert werden können, bei denen Begriffe wie Extremstelle dennoch als Mittel zur Beschreibung von Veränderungen bedeutsam sind.

Die Komplexität des Lerninhaltes Kurvendiskussion kann in einem Modell des Aspekt- und Ebenenwechsels von Grundvorstellungen verdeutlicht werden, das auch zur Analyse von Schülervorstellungen dient.

Das Problem und gängige Antworten

Die klassische Kurvendiskussion, d.h. die Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und deren Ableitungen mit dem Ziel der genaueren Untersuchung des Funktionsverlaufs, ist vielfach kritisiert worden als Inbegriff des mechanischen Abarbeitens von Schemata ohne inhaltlichen Sinn (z.B. Danckwerts 1992, Borneleit u.a. 2001, Bürger/Malle 2000, Blum 2000, S. 5). Wie wenig inhaltliches Verständnis dabei aufgebaut wird, zeigt das Ergebnis der folgenden Aufgabe aus dem internationalen Vergleichstest TIMSS 3 (Baumert u.a. 2000). Sie wurde von 45% aller Schüler mit Bildungsziel Hochschulreife in den beteiligten OECD-Staaten gelöst, in Deutschland waren es 35%. Nur ein gutes Drittel der deutschen Oberstufen-Schülerinnen und -Schüler war also in der

K5. Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:
$f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?



Lage, die grundlegenden Aussagen über die Ableitungsfunktion in Bezug auf die gegebenen Beispiele geometrisch zu interpretieren.

Antworten auf das Problem des verständnislosen Hantierens mit Rezepten wurden durch didaktische Ansätze ganz unterschiedlicher Ausrichtung gegeben. Neben der Betonung der geometrischen Veranschaulichungen (Barth, Krumbacher 1999, S. 118-125; Kirsch 1979) und der Einbeziehung komplexerer Kurven statt nur Funktionen mit eindimensionalem Zielbereich (Schupp 1998, Kirchgraber 1999) stehen dabei realitätsbezogene Extremwert-, d.h. Optimierungsprobleme als sinnstiftende Anwendung der Kurvendiskussion im Vordergrund (z.B. Danckwerts/Vogel 2001a,c; Henn 1997, S. 56-67; Griesel/Postel 2001, S. 210f). Damit kann zwar das Themenfeld geöffnet und die Bestimmung von Extremstellen als anwendungsrelevant begriffen werden, gleichwohl ist immer noch der Ableitungskalkül als solcher das entscheidende Werkzeug. Andere Autoren haben sich daher bemüht, Extremwertprobleme ohne den Ableitungskalkül mit so genannten elementaren Methoden wie z.B. der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel zu lösen (Danckwerts/Vogel 2001b). Fast durchgängig findet man den Vorschlag, Computer oder CAS-fähige Taschenrechner zu nutzen, da diese eine Entlastung von aufwändigen Kalkülen zugunsten der Ausbildung von Grundvorstellungen ermöglichen können (Blum 2000; Henn 2000; Schmidt 2000; Schneider 2000).

Was ist der Kern des Themas?

Angesichts der Vielfalt der Ansätze zur Weiterentwicklung des zu kalkülorientierten Unterrichts stellt sich die Frage, was der eigentliche Bildungswert des Themas Kurvendiskussion ist. Neben vielen interessanten innermathematischen Aspekten, etwa der Erfahrung, dass geometrische Eigenschaften eines Funktionsgraphen sich rein auf der algebraisch-analytischen Ebene bestimmen lassen, liegt unserer Ansicht nach ein wichtiges Ziel der Auseinandersetzung mit dem Themengebiet darin, *Extrem- und Wendepunkte als mathematische Konzepte zur Erfassung und Beschreibung der charakteristischen Momente von Wachstums- und Veränderungsprozessen* zu begreifen und aktivieren zu können. (Das trifft ebenso zu auf weitere Aspekte der Kurvendiskussion wie Symmetrie, asymptotisches Verhalten u.a., wir fokussieren hier jedoch auf Extrem- und Wendepunkte.) Wir schließen uns damit Hans Freudenthal an in seiner Ansicht, die mathematischen Begriffe, Strukturen und Ideen seien „erfunden worden als Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen“ (Freudenthal 1983, S. IX). Konkret gesagt: Es sollte Bestandteil von mathematischer Bildung sein, Aussagen wie „Die Neuverschuldung des Bundes ist dieses Jahr erstmalig nicht weiter angestiegen.“ mit Hilfe der mathematischen Konzepte Extrem- und Wendepunkt in ihrer Bedeutung adäquat erfassen zu können. Die Aktivierung der Konzepte im Sinne einer offenen Mathematik (also zur Strukturierung des Problemfeldes) hat dabei aus unserer Sicht eine größere Bedeutung als das Anwenden des Kalküls im Sinne einer geschlossenen Mathematik, etwa als Werkzeug zur Berechnung eindeutiger Lösungen von Optimierungsproblemen (zur offenen Mathematik vgl. Fischer 1984).

$f(x)$	$f'(x)$	Extrempunkte	Wendepunkte
Geometrische Deutung:			
Funktionsgraph	Steigung der Tangente an den Funktions-graphen an der Stelle x	Hochpunkt: Tangente ist parallel zur x-Achse. Vorher war die Tangen-tensteigung positiv, ab hier wird sie negativ.	Die Tangentensteigung hat einen Extremwert.
Inhaltliche Deutungen:			
Entfernung f von einem festen Punkt in Abhängigkeit von der Zeit x	Momentan-geschwindigkeit zum Zeitpunkt x	Die Momentan-geschwindigkeit ist Null. Die Bewegungsrichtung kehrt sich hier um.	(1): Maximum der Momentan-geschwindigkeit vom festen Punkt weg (2): Maximum der Momentan-geschwindigkeit zum festen Punkt hin
Ausbreitung Epide-mie: Anzahl f der Erkrankten zu einem Zeitpunkt x	Lokale Änderung: Ausbreitungsge-schwindigkeit, Zunahme der Anzahl der Er-krankten pro Tag	Hochpunkt: Höchstzahl der Erkrankten, ab hier nimmt die Anzahl der Erkrankten wieder ab.	(1): Ausbreitungsgeschwindigkeit erreicht ein Maximum, d.h. die Anzahl der Erkrankten steigt wie-der langsamer. (2): Die tägliche Abnahme der Anzahl der Erkrankten erreicht ihr Maximum, d.h. ab jetzt ist die tägliche Abnahme der Erkrankten wieder rückläufig.
Höhe (Menge) f der Staatsschulden zu einem Zeitpunkt (zu Beginn des Jahres) x	Jährliche Neu-verschuldung: Wachstumsge-schwindigkeit der Schulden pro Jahr	Hochpunkt: Höchststand der Staatsschulden, ab hier nehmen die Schulden ab.	(1): Neuverschuldung sinkt, d.h. der Schuldenberg wächst wieder langsamer.
allg. Wachstumspro-zess: z.B. Größe der Population f in Abhängigkeit von der Zeit x	Lokale Änderung / Wachstumsge-schwindigkeit	Hochpunkt: Ab hier wird die Population wieder kleiner.	(1): Wachstumsgeschwindigkeit ist am größten. Ab hier ist Wachstum verlangsamt. (2): „Abnahmegeschwindigkeit" ist am größten.
Landwirtschaftl. Out-put (Menge des Er-trags) f in Abhän-gigkeit vom Produkti-onsfaktor Arbeit (z.B. Anz. der Arbeitsstun-den der auf dem Hof Arbeitenden) x	Veränderung des Outputs bei Er-höhung der An-zahl der Arbeits-stunden	Hochpunkt: Höchstmögli-cher Output des Hofs. Noch mehr Arbeitskräfte würden zu einer Abnahme des Outputs führen.	Die Zunahme des Outputs bei zusätzlichen Arbeitsstunden ist in der Nähe des Wendepunkts am größten. d.h. hier lohnt sich der Arbeitsaufwand eines weiteren Landarbeiters am meisten.

Damit Lernende zu einer Mathematisierung solcher Aussagen in der Lage sind, müssen sie geeignete Grundvorstellungen zu den Konzepten aufbauen. Dem Aufbau von Grundvorstellungen als Vermittler zwischen Mathematik und Realität und als mentale Modelle für mathematische Begriffe (vom Hofe 2003, vom Hofe 1995) wurde in der Didaktik der Analysis für den Ableitungsbegriff bereits einige Aufmerksamkeit gewidmet (vgl. etwa Blum/Kirsch 1979; Blum/Törner 1983 S. 91ff.; Blum/Kirsch 1996, Schneider 2000):

„Grundvorstellungen sind die Träger der Bedeutung. Insofern ermöglichen sie Lernenden das Erfassen der Bedeutung mathematischer Gegenstände, d.h. inhaltliches Verstehen.“ (Blum 2000, S. 8)

Während bisher jedoch auf den für die Differentialrechnung zentralen Begriff der Ableitung fokussiert wurde, plädieren wir dafür, den Ansatz auch auf den Aufbau von Grundvorstellungen zu den weiteren Konzepten wie Extrem- und Wendepunkt zu übertragen. Denn auch hier entwickeln sich die adäquaten Grundvorstellungen nur partiell von allein.

Aufbau von Grundvorstellungen über Ableitung hinaus

Wie lassen sich Grundvorstellungen zu Extrem- und Wendepunkten aufbauen? Dazu kann die Diskussion höher dimensionaler Kurven ebenso wenig beitragen wie die Bearbeitung von Extremwertproblemen mit elementaren Methoden. Auch die bisher im Vordergrund stehende geometrische Deutung der Konzepte allein reicht nicht, denn zum Aufbau von Grundvorstellungen als *Vermittler zwischen Mathematik und Realität* muss vor allem ihre Bedeutung für funktional beschriebene Sachzusammenhänge thematisiert werden, z.B. als kritische Punkte in Wachstumsprozessen. Wünschenswert als Endziel wäre, wenn Lernende eine Tabelle wie die auf der folgenden Seite füllen und somit Kurven von funktional beschriebenen Zusammenhängen vorstellungsorientiert untersuchen zu können, indem sie dazu mathematische Konzepte wie Extrempunkte und Wendepunkt aktivieren (siehe hinten für genauere Beispiele).

Schwierigkeit: Aspekt- und Ebenenwechsel

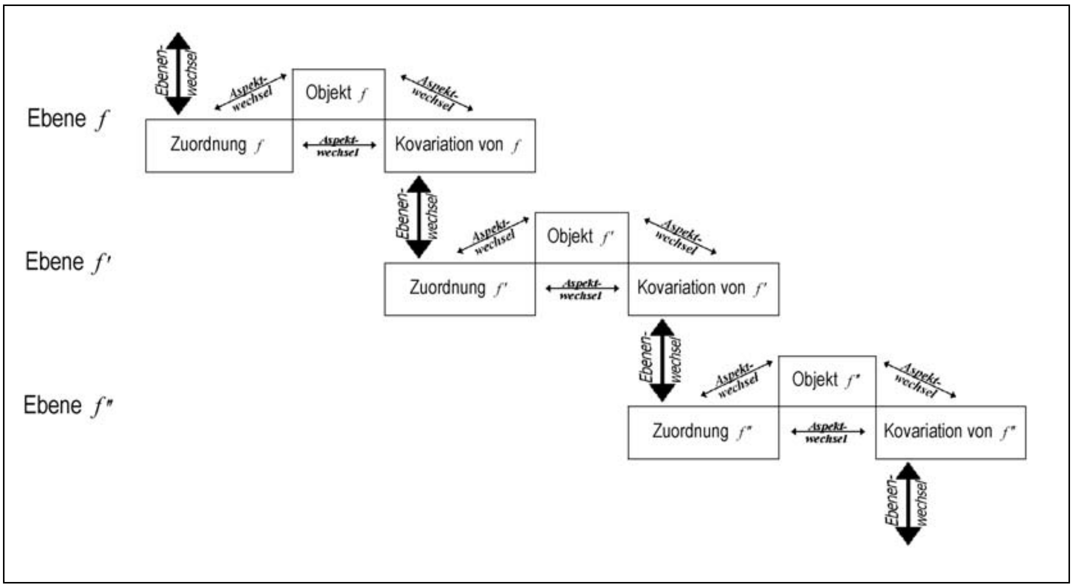
Obwohl die meisten Lernenden in einem Graphen die geometrische Deutung der Extrem- und Wendepunkte erläutern können, wirft die Interpretation in Bezug auf reale Sachzusammenhänge oft Probleme auf. Warum ist der Aufbau adäquater Vorstellungen für Lernende eigentlich so schwer? Die Komplexität des Lerninhaltes Kurvendiskussion kann in einem Modell des Aspekt- und Ebenenwechsels von Grundvorstellungen verdeutlicht werden.

Wie vielfach herausgestellt wurde, lässt sich ein mathematischer Begriff in der Regel nicht mit einer Grundvorstellung allein, sondern eher mit mehreren Grundvorstellungen erfassen, die geeignet zu einem Netzwerk verknüpft werden müssen (z.B. vom Hofe 2003). Für den Begriff der Funktion gibt vom Hofe (1996) die folgenden Grundvorstellungen an (in absteigender Rangfolge der Wichtigkeit):

1. Zuordnungsvorstellung
2. Kovariationsvorstellung
3. Objektvorstellung.

Mit Kovariation ist das Änderungsverhalten von f gemeint, wenn sich das Argument x ändert. In Anlehnung an Malle (2000) wird hier bei einem Wechsel der Grundvorstellungen zu einer Funktion f von Aspektwechsel gesprochen. Biermann (2003) hat nachgewiesen, dass gerade der Wechsel hin zum Kovariationsaspekt vielen Zehntklässlerinnen und Zehntklässlern schwer fällt.

In der Kurvendiskussion kommt zu dem unerlässlichen Aspektwechsel auch ein Ebenenwechsel hinzu, und die o.a. Aspekte müssen auf Ableitungen f', f'',... übertragen werden. Ein Wechsel zwischen den Ableitungsebenen, z.B. von f nach f', lässt sich im einfachsten Fall als Perspektivwechsel von der Kovariation von f zur Zuordnung f' denken. Solch ein Wechsel wird hier Ebenenwechsel genannt. Derartige Ebenenwechsel können selbstverständlich zwischen allen benachbarten Ableitungsebenen hin und her stattfinden.



Wer die Kovariation von f ihrerseits wieder als eine eigene Zuordnung auffasst, kommt auf die Zuordnung f'. Der Ebenenwechsel bedeutet also in der einen Richtung (nach unten) eine gedankliche Kapselung der Kovariation. Umgekehrt lässt sich in der anderen Richtung eine Zuordnung als Kovariation einer neuen Funktion denken (nach oben). Auf jeden Fall ist wird durch f' die Kovariation von f in spezifischer Weise quantifiziert. Analoges gilt für die anderen Ebenenwechsel.

Eine in ersten Voruntersuchungen analysierte Diskussion zweier Schülerinnen über die oben genannte TIMSS-Aufgabe (entnommen aus Jungwirth/Stadler 2003) zeigt deutlich: Die Hauptschwierigkeit liegt darin, auf der einen Seite die Ebenen mit Hilfe dieser Aspektwechsel zu verknüpfen und sie andererseits sauber genug zu trennen. Eine Äußerung wie „Wo die Steigung sich umdreht, ist der Wendepunkt." (ebda.) lässt auf eine Verwechslung der Ebenen schließen. Denn „Wo die Steigung sich umdreht" arbeitet mit der Kovariation von f, während „ist ein Wendepunkt" mit der Kovariation von f' arbeiten muss.

Beginnen mit qualitativen Kurvendiskussionen

„Im Analysisunterricht sollte – beim Begriffbilden wie beim Beweisen - mehr präformal gearbeitet werden, ohne dabei Abstriche an die Strenge zu machen. Schüler sollten angemessene Grundvorstellungen insbesondere vom Funktions-, Ableitungs- und Integralbegriff erwerben. ... Zum präformalen Arbeiten gehört nicht nur quantitatives, sondern auch qualitatives Umgehen mit Graphen.“ (Blum 2000, S. 8)

Gerade weil der Ebenen- und Aspektwechsel für das inhaltliche Verständnis des Themenfeldes die eigentliche Schwierigkeit darstellen, greifen wir Blums Idee auf, die Beschäftigung mit nur qualitativ gegebenen Funktionen (Swan u.a. 1985, Stellmacher 1986) auch auf die Analysis der Sekundarstufe II auszuweiten.

„In der sofortigen quantitativen Behandlung liegt eben stets die Gefahr, dass die Schüler in den Berechnungen verharren. [...] Der Ansatz über Graphen von Funktionen bietet dagegen die Möglichkeit, ihre Belastung durch ein numerisch schwierig zu handhabenden Funktionsterm Funktionen so zu gebrauchen, dass die wesentlichen Charakteristika der Verwendung von Funktionen bereits in der Einführungsphase hervortreten. In vielen inner- und außermathematischen Anwendungen liegen diese Charakteristika in globalen Eigenschaften der Funktionen begründet.“ (Stellmacher 1986, S. 26)

Qualitative Zugänge sind zwar in der Funktionenlehre der Sekundarstufe I inzwischen durchaus verbreitet (Herget 1995, Segelken 1999 u.v.a.), spielen aber in der SII bisher kaum eine Rolle. Dahinter vermutet Blum Zweifel und Fehlverständnis über das, was präformales Arbeiten ausmacht (2000, S. 8). Wir erhoffen uns, durch eine genauere Explizierung möglicher Aufgabenstellungen und ihren Beitrag zum Aufbau entsprechender Grundvorstellungen eine größere Verbreitung des Ansatzes auch als tragfähige Grundlage einer vorstellungsorientierten Untersuchung von funktional beschriebenen Prozessen.

Beispiel 1: Neuverschuldung

24. Januar 2004

Neuverschuldung gesunken

Die Einnahmesituation Hamburgs bleibt nach Einschätzung von Finanzsenator Wolfgang Peiner (CDU) "unverändert kritisch". Allerdings sei der "freie Fall" gestoppt. Die Einkünfte aus der Körperschafts- und Gewerbesteuer seien leicht gestiegen. Im Gegensatz zu vielen anderen Ländern müsse die Hansestadt aber auch für 2004 keinen Haushaltsnotstand anmelden. Wolfgang Peiner zeigte sich zuversichtlich, dass die Netto-Neuverschuldung weiter sinkt. Nach dem vorläufigen Haushaltsabschluss musste Hamburg 2003 insgesamt 800 Millionen Euro neue Schulden machen, 12 Millionen weniger als 2002. Die Investitionen lagen bei 900 Millionen Euro. Die Stadt habe mit 8,6 Milliarden Euro 2003 für die laufenden Kosten 14 Millionen Euro weniger ausgegeben als zunächst vorgesehen. *schmoo*

a.) Lesen Sie die den Artikel sorgfältig durch. Wieso ist mit dem Sinken der Neuverschuldung der „freie Fall gestoppt“? Wieso ist die Lage dennoch „unverändert kritisch“?

b.) Meine Nachbarin, Frau Meier, glaubte nach dieser Meldung, Hamburgs Schuldenberg würde nun sinken. Was würden Sie ihr sagen? Welcher Irrtum ist ihr unterlaufen?

c.) Beschreiben Sie die Veränderung der Schulden und der Neuverschuldung mit Begriffen aus der Analysis (Welche eignen sich dazu, welche nicht?).

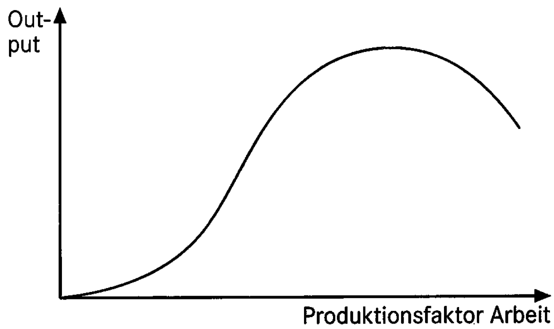
d.) Die Bundesregierung konnte in den letzten Jahren nur noch zurückhaltender gute Botschaften verkünden:

> „Die Neuverschuldung des Bundes ist dieses Jahr
> erstmalig nicht weiter angestiegen."

Wie würden Sie diese Nachricht erklären? Was bedeutet sie für die Neuverschuldungskurve, was für die Schuldenkurve?

Bei der Bearbeitung einer solchen Aufgabe werden die Eigenschaften des Schuldenverlaufs nichtnumerisch erfasst. Dabei werden Erörterungssituationen gestiftet, die die charakteristischen Punkte des Funktionsverlaufs in ihrer Erklärungskraft hervortreten lassen. Wachstumsprozesse wie hier das Wachstum der Schulden sind ein prototypisches Themenfeld, in dem die funktionale Modellierung die begriffliche Erfassung der kritischen Momente erlaubt. In der Beschäftigung mit solchen Aufgaben können Lernende die Unterscheidung zwischen Hoch- und Wendepunkte als hilfreiches Mittel zur Klärung von Missverständnissen erfahren.

Beispiel 2: Ertragsgesetz



Das folgende Beispiel stammt aus der Landwirtschaft (nach einer Idee von Cukrowicz/Zimmermann 2003, S. 105; vgl. auch Mey 1996, S. 80-81). Die abgebildete Produktionsfunktion wird auch Ertragsgesetz genannt und veranschaulicht den landwirtschaftlichen Ertrag (Output) in Abhängigkeit von der aufgewendeten Arbeit (Produktionsfaktor Arbeit).

Es wird dabei angenommen, dass ein Landwirt eine konstante Anbaufläche besitzt, die er kurzfristig nicht vergrößern kann. Der Produktionsfaktor Boden ist also konstant. Auch der landwirtschaftliche Maschinenpark sowie der Einsatz für Düngemittel werden ebenfalls als konstant angenommen. Lediglich der Produktionsfaktor Arbeit, der Jäten, Hacken und Graben umfasst, wird als variabel angenommen. Der Kurvenverlauf gibt nun zu erkennen, dass zunehmender Arbeitseinsatz zunächst zu steigenden Erträgen derart führt, dass sogar die Ertragssteigerung noch zunimmt (progressiv). Nach Überschreiten des Wendepunktes steigt der Ertrag zwar noch weiter, jedoch nimmt die Ertragssteigerung ab (degressiv). Ab einem bestimmten Arbeitseinsatz, der im Graphen durch einen Extrempunkt repräsentiert wird, ist schließlich überhaupt keine Ertragssteigerung mehr zu erwarten. Wird der Arbeitseinsatz über diesen Punkt hinaus noch erhöht, sinkt sogar der Ertrag.

a.) Für welche Betriebe lohnt sich ein zusätzlicher Arbeitseinsatz überhaupt?

b.) Für welche Betriebe lohnt sich ein zusätzlicher Arbeitseinsatz besonders?

Diese Funktion ist ein typisches Beispiel aus der Ökonomie, in der funktionale Zusammenhänge oft nur qualitativ beschrieben sind, während sich die genaue Parametrisierung der beschriebenen Zusammenhänge als schwierig oder sogar unmöglich erweist. In solchen Fällen ist die quantitative Behandlung nicht möglich, dennoch sind die mathematischen Konzepte wie Extrem- und Wendepunkt im Sinne einer offenen Mathematik hilfreiche Mittel zur Strukturierung des Phänomens.

Ausblick auf das Forschungsprojekt

Wie den Herausforderungen von Ebenen- und Aspektwechsel durch den Bezug auf qualitative Beispiele besser begegnet werden kann, ist Gegenstand eines Forschungsprojektes zur vorstellungsorientierten Kurvendiskussion. Darin sollen im Forschungsrahmen der Didaktischen Rekonstruktion (Kattmann u.a. 1997) ausgehend von einer sorgfältigen Analyse der Schülervorstellungen (durch eine Interviewstudie) und der bereits vollzogenen didaktischen Analyse des Lerninhaltes dann Lernumgebungen entworfen und erprobt werden. Der enge Bezug von fachlicher Klärung, Erfassung von Schülervorstellungen und didaktischen Strukturierung, wie er in der didaktischen Rekonstruktion vorgesehen ist, erscheint uns als sehr geeigneter forschungsmethodischer Rahmen, um Lernwege zu entwickeln, die Schülerinnen und Schüler bei ihren Ausgangsvorstellungen abholt und hinführt zu einem vorstellungsorientierten, verständigen Umgang mit einem klassischen mathematischen Inhalt.

Literatur

Barth, Friedrich / Krumbacher, Gert (1999): Analysis anschaulich 1, Oldenbourg, München.

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2000). Dritte internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Leske + Budrich, Leverkusen.

Biermann, Mark (2003): Welche Vorstellungen haben Zehntklässler von Funktionen? Konzeption und erste Ergebnisse einer explorativen Studie, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker, S. 113-116.

Blum, Werner (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht, in: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 5-17.

Blum, Werner / Kirsch, Arnold (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, in: Der Mathematikunterricht 25(3), S. 6-24.

Blum, Werner / Kirsch, Arnold (1996): Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, in: Mathematik lehren 78, S. 60-65.

Blum, Werner / Törner, Günter (1983): Didaktik der Analysis, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Borneleit, Peter / Danckwerts, Rolf / Henn, Hans-Wolfgang / Weigand, Hans-Georg (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, in: Journal für Mathematikdidaktik 22 (1), S.73-90. Online unter http://www.math. uni-siegen.de/didaktik/downl/expertise.pdf

Bürger, Heinrich / Malle, Günter (2000): Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung, in: Mathematik lehren 103, S. 56-59.

Cukrowicz, Jutta / Zimmermann, Bernd (2003): MatheNetz 11, Ausgabe N, Westermann, Braunschweig.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (1992): Quo vadis, Analysisunterricht?, in: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 45(6), S. 370-374.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (2001a): Extremwertprobleme mit Analysis - Anmerkungen zu einer stabilen Tradition, in: Der Mathematikunterricht 47(4), S. 16-21.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (2001b): Extremwertprobleme ohne Analysis – die Kraft elementarer Methoden, in: Der Mathematikunterricht 47(4), S. 32-38.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (2001c): Milchtüte und Konservendose – Modellbildung im Unterricht, in: Der Mathematikunterricht 47(4), S. 22-31.

Fischer, Roland (1984): Offene Mathematik und Visualisierung, in: Mathematica Didactica 7 (3/4), S. 139-160.

Freudenthal, Hans (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht.

Griesel, Heinz / Postel, Helmut (2001): Elemente der Mathematik 11, Schroedel, Hannover.

Henn, Hans-Wolfgang (1997): Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE, Dümmlers Verlag, Bonn.

Henn, Hans-Wolfgang (2000): Analysisunterricht im Aufbruch, in: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 26-45.

Herget, Wilfried (1995): Mathe-Aufgaben – einmal anders?, in: Mathematik lehren 68, S.64-66.

Hofe, Rudolf vom (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg.

Hofe, Rudolf vom (1996): Neue Beweglichkeit beim Umgang mit Funktionen, in: Mathematik lehren 78, S. 50-54.

Hofe, Rudolf vom (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: Mathematik lehren 118, S. 4-8.

Jungwirth, Helga / Stadler, Helga (2003): Ansichten - Videoanalysen zur Lehrer/-innenbildung, Innovationen im Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht, Band 2, Studienverlag, Innsbruck u.a.

Kattmann, Ulrich / Duit, Reinders / Gropengießer, Harald / Komorek, M. (1997): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung, in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 3 (3), S. 3-18.

Kirchgraber, Urs (1999): Kurvendiskussion quo vadis?, in: Selter, Christoph / Walther, Gerd (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science, Klett, Leipzig, S. 112-119.

Kirsch, Arnold (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff, in: Der Mathematikunterricht 25(3), S. 25-41.

Malle, Günther (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation, in: Mathematik lehren 103, S. 8-11.

Mey, Hermann (1996): Ökonomie für Pädagogen, Oldenbourg, München, Wien.

Schmidt, Günter (2000): Analysisunterricht mit CAS als Werkzeug, ein großer Schritt zu den gewünschten Veränderungen?, in: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 46-71.

Schneider, Edith (2000): Einstieg in die Differentialrechnung mit CAS, in: Mathematik lehren 102, S. 40-43.

Schupp, Hans (1998): Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion, in: Der Mathematikunterricht 44 (4-5), S. 5-21.

Segelken, Sabine (1999): Badewanne und Co. Funktionen in anschaulichen Beispielen als Einstieg in die Analysis, in: Mathematik lehren 94, S.58-60.

Stellmacher, Hubertus (1986): Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht, in: von Harten, Gert u.a. (1986): Funktionsbegriff und funktionales Denken. Aulis, Köln. S.21-34.

Swan, Malcolm u.a. (1985): The Language of Functions and Graphs. Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.