

„Alles ist relativ, nur nicht die Mathematik, oder?“

Susanne Prediger

In etwas gekürzter Fassung erschienen in: *Mathematik lehren* 116 (Feb 2003), S. 37-38.

Unsere Schule plant eine Projektwoche zum interkulturellen Lernen mit dem Titel „Alles ist relativ, oder?“ Viele Ideen werden spontan im Lehrerzimmer gesammelt, um das Thema aus unterschiedlichen Perspektiven der einzelnen Fächer zu beleuchten. Erstaunlich schnell sind sich die Kolleginnen und Kollegen aus den Geisteswissenschaften, die dort zusammensitzen, auch einig, dass die Mathematik ja sicherlich nichts zu dem Thema beitragen kann, denn, so eine Deutschkollegin, „1+1 ist halt immer 2, da kann man nicht kulturell dran herumdeuteln.“

Mich ärgert, dass die Kolleginnen und Kollegen mich gleich ausschließen, denn meines Erachtens hat Mathematik sehr wohl etwas zum interkulturellen Lernen und perspektivischen Sehen beizutragen. Vor allem aber irritiert mich, dass die von den Kollegen geäußerte Vorstellung, im Mathematikunterricht habe Interkulturelles ja keinen Platz, direkt mit der vermeintlichen Objektivität der Mathematik verknüpft wird. Grummelnd ziehe ich mich in eine Ecke zurück und mache ein vielleicht abwegiges, mich aber fesselndes Gedankenspiel: Im Geiste kündige ich ein Tagesprojekt für die Klassen 10 bis 13 an mit dem zugegebenermaßen etwas provokativen Titel „1+1=2 – eine ewige Wahrheit?“

Erstes Hinterfragen

Als Einstieg in das Thema fordere ich die Schüler/innen auf, zu überlegen, wie sie eine *Verneinung* unserer Projektfrage begründen könnten. Nach einigem Stocken und zu Beginn etwas zähem Ringen („Aber es ist doch so und wird so bleiben, oder?“) werden sie kreativ und beginnen, sich Situationen und Zusammenhänge zu suchen, in denen 1+1 eben doch nicht 2 ist. Sie sammeln folgende Antworten:

- im Binärsystem gilt $1+1 = 0$,
- treffen zwei Wassertropfen aufeinander, so verschmelzen sie zu einem, hier gilt also $1+1=1$,
- bei der Fusion zweier Konzerne verspricht man sich Synergieeffekte und man hofft, dass gilt $1+1 > 2$,
- gleichzeitig wünscht man sich von Fusionen Rationalisierungseffekte, dass also gilt $1+1 < 2$.

So richtig zufrieden sind wir mit den Antworten allerdings nicht, denn die Zusammenhänge kommen einem sehr an den Haaren herbeigezogen vor, während der eigentliche Rechengesetz „1+1=2“ davon nicht so richtig angetastet wird. Diese Art der Widerlegung erscheint den Lernenden also schnell zu vordergründig und zu leicht mit dem Argument

aushebelbar. Man darf eben nicht beliebiges mit mathematischen Mitteln beschreiben und glauben, die Antwort gelte dann immer.

Aber trotzdem, was heißt dann überhaupt, der Rechengesetz ist wahr? Wir realisieren, dass der Rechengesetz ohne irgendeine Einbindung kaum Bedeutung trägt. Bevor man über seine Gültigkeit entscheiden kann, muss man spezifizieren, über was in diesem Satz eigentlich Aussagen getroffen werden sollen: über Äpfel? nur über die „Zahlen selbst“? (Was ist das?) Über das neutrale Element einer kommutativen Untergruppe von \mathbb{R} ? (Das schießt mir dazu noch durch den Kopf.) So erarbeiten wir uns, dass es ein mathematisches Wissen ohne Kontext kaum gibt.

„Sie können von Nichtmathematikern, besonders von Philosophen, oft hören, die Mathematik habe lediglich Folgerungen aus klar gegebenen Prämissen zu ziehen [...]. Ganz anders aber wird jeder, der selbst produktiv mathematisch arbeitet, reden. In der Tat urteilen jene Leute nach der auskristallisierten Form, in der man fertige mathematische Theorien zur Darstellung bringt.“
(Felix Klein 1933)

Pythagoras im Kontext

Gleich kommt aber der nächste Einwand: Was ist mit innermathematischem Wissen? Ist das nicht frei von dem Problem des wechselnden Kontextes? Ist das nicht gerade dafür gemacht, erst später auf Sachsituationen übertragen zu werden, d.h. zunächst für sich erst mal wahr zu sein? Als Beispiel widmen wir uns dem Satz des Pythagoras als Prototyp geometrischen Wissens, das seit Jahrtausenden zu gelten scheint. Anhand verschiedener Ausschnitte mathematikhistorischer Texte erarbeiten sich die Schüler/innen nun, was der Satz des Pythagoras zu verschiedenen Zeiten bedeutete:

- Bei den Babyloniern war die Erkenntnis, dass in rechtwinkligen Dreiecken die Seitenlänge in der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ stehen, eine Aussage aus der menschlichen Erfahrungswelt, die (bzw. deren Umkehrung) für Architektur und Landvermessung ausgenutzt wurde. Sie bezog sich auf reale rechte Winkel, z.B. die eines Feldes.
- In der griechischen Mathematik wurde der gleiche Satz als theoretische Einsicht behandelt, dessen Nutzung weniger wichtig war als sein Beweis durch Herleitung aus grundlegenden Axiomen. Er bezog sich auf ideale Dreiecke, also rein gedankliche Konstrukte, d.h. völlig andere Objekte.
- Mit den nicht-euklidischen Geometrien haben Carl Friedrich Gauß (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) und Nicolai Lobatschewski (1793-1856) geometrische Strukturen definieren können, in denen der Satz des Pythagoras nicht gilt. Die

„Wahrheit“ des Satzes des Pythagoras ist seitdem sehr relativiert: Er ist nur in den speziellen Geometrien wahr, in denen das Parallelenaxiom gilt.

- In einer axiomatisch aufgebauten analytischen Geometrie, wie sie heute an den Hochschulen gelehrt wird, ist der Satz des Pythagoras eine Trivialität, der aus der Definition des Betrags eines Vektors im \mathbb{R}^2 folgt (in diese Definition geht er natürlich ein, aber nicht mehr als beweisbarer Zusammenhang, sondern als unhinterfragtes Axiom).

Die Lernenden sind erstaunt von dem, was sie da zusammen kommt: Angesichts dieser ganz unterschiedlichen Perspektiven auf den Satz des Pythagoras, wie kann man da von einer allgemeingültigen Wahrheit sprechen? Was ist der Satz ohne seinen jeweiligen Kontext überhaupt noch? Ein Rumpf, eine Formel ohne Bedeutung. Sie lernen, die „eigentlich wichtigen Fragen“ an eine mathematische Aussage zu stellen:

- Vor welchem Hintergrund wird eine Aussage getroffen?
- In welchem Zusammenhang gilt sie?
- Welche Annahmen wurden schon hineingesteckt?
- In welchem Begründungszusammenhang steht sie?

Nachdem wir diese „eigentlich wichtigen Fragen“ gesammelt haben, überlegen wir abschließend, was nun unsere mathemathikhistorischen und –philosophischen Ausflüge mit dem Thema der Projekttag zu tun haben: Relativ ist die Mathematik also auch, wenngleich in einem etwas anderen Sinne. Was aber nehmen wir daraus für das interkulturelle Lernen mit? Besonders wichtig erscheint in der Diskussion „die Sache mit der Perspektivität“: Wenn es selbst in Mathematik nichts immer Gültiges gibt, sondern es darauf ankommt, aus welcher Richtung man die Zusammenhänge betrachtet, wie ist es erst in anderen Bereichen des Lebens!

Einsichten und Aussichten

Über diese Einsicht in die Bedingtheit mathematischer Sätze hinaus, haben wir auch Ansätze für einen Umgang mit dieser Tatsache gefunden: Um unterschiedliche Perspektiven besser verstehen und beurteilen zu können, helfen die „eigentlich wichtigen Fragen“ auch in anderen Bereichen: Es sind die Fragen nach Hintergrund und Zielsetzung der Perspektive, die beitragen, eine zunächst fremde Sichtweise zu verstehen.

Und so bin ich in der Summe mit meinem kleinen Projekt sehr zufrieden, ärgere mich im Nachhinein nur, dass ich mich nicht getraut habe, es *wirklich* anzubieten! Zu groß die Sorge, dass ich die Lernenden nicht in den Grundfesten ihrer Überzeugungen erschüttern darf, dass bei aller Relativität der heutigen multikulturellen, pluralistischen Gesellschaft nun auch noch die Mathematik relativiert wird.

Inzwischen, nach all den Diskussionen im Rahmen der Erstellung dieses Heftes, habe ich Mut gefasst und es reizt mich, mit Schülerinnen und Schülern wirklich einmal darüber nachzudenken, wie sicher mathematisches Wissen eigentlich ist. Argumentati-

onshilfen erhalte ich nicht nur bei den Mathematikphilosophen (insbesondere Tymoczko 1985) und Mathematikhistorikern (z.B. Wilder 1981, Kitcher 1984), sondern auch bei Wissenssoziologen, die untersucht haben, inwieweit die Entstehung mathematischen Wissen durch sozial-kulturelle Faktoren beeinflusst wurde (z.B. Heintz 2000). Trotz der Zumutung der Verunsicherung wäre dies doppelt reizvoll, denn die Schülerinnen und Schüler könnten sich nicht nur mit dem allgemeinen Gedanken der Perspektivität auseinandersetzen, sondern darüber hinaus auch über das Wesen der Mathematik sehr viel lernen. Ich freue mich auf die nächste Gelegenheit, es zu versuchen!

„Insofern die Sätze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“ (Albert Einstein 1955)
--

Zum Weiterlesen:

- Bloor, D.: What can the sociologist say about $2+2=4$?, in: Ernest, P. (Hrsg): Mathematics, Education and philosophy: An international perspective, The Falmer Press, London, 1994, S.21-32.
- Heintz, B.: Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin, Springer, Wien / New York, 2000.
- Kitcher, P.: The nature of mathematical knowledge, Oxford University Press, New York, 1984.
- Tymoczko, T. (Hrsg.): New Directions in the Philosophy of Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1985.
- Wilder, R. L.: Mathematics as a cultural system, Pergamon Press, Oxford et al., 1981.