Mathematik mit Sinn

Beispiele aus einem Mathematikunterricht, der an Lebensfragen ansetzt

Katja Lengnink, Susanne Prediger

erschienen in: Pädagogik (7-8) 2002, S. 67-69.

1. Sinnorientierung im Mathematikunterricht

„Was hat Mathematik mit mir zu tun?“ Diese Frage wird im Mathematikunterricht häufig gestellt und in unterschiedlichen Formulierungen variiert. Mit unserem Beitrag wollen wir dafür werben, solcherart Fragen nicht als ungewollte Störungen des Unterrichts, sondern als konstruktives Potential für Lernen zu begreifen.

Die Frage nach der Bedeutung von Mathematik kann zum einen durch die gesellschaftliche Rolle der Mathematik, zum anderen durch ihre Verbindung zum individuellen Denken der Lernenden bearbeitet werden. Zu beiden Zugängen stellen wir im folgenden Unterrichtsbeispiele vor, die geprägt sind von einer Nachdenklichkeit über die Bedeutung der Mathematik. Sie geben damit mögliche Antworten auf für Lernende drängende Sinnfragen. Darüber hinaus sind sie wichtiger Inhalt und gleichzeitig Ziel einer mathematischen Bildung, die sich der Wagenscheinschen Erziehung zu wissenschaftsverständigen Bürgern verpflichtet fühlt (Wagenschein 1977).

2. Funktionale Abhängigkeit – Anknüpfen am Alltagsdenken der Schüler

Mit der funktionalen Abhängigkeit und dem Funktionsbegriff liegt ein fundamentales Konzept des Mathematikunterrichts der Mittelstufe vor, das ab der siebten Klasse eingeführt und im Sinne der Curriculumspirale präzisiert wird. Wir wollen im Folgenden ein Unterrichtsprojekt vorstellen, in dem wir versucht haben, an allgemeinen Grundvorstellungen der Lernenden zu Abhängigkeiten zwischen Größen anzuknüpfen und ein Erarbeiten des Konzeptes der funktionalen Abhängigkeit in diesem komplexen Feld sinnbezogen zu gestalten. Das Projekt wurde in einer neunten Jahrgangsstufe einer Darmstädter freien Schule durchgeführt. Lassen Sie sich auf eine kleine Reise in die Welt der Mathematik ein...

Die Reise begann bei Pinocchios Nase, die in Abhängigkeit von der Anzahl seiner Lügen wächst. Conodis Hörspiel führte uns im Unterrichtsgespräch zur *Abhängigkeit zwischen Größen* als einem allgemeinen Phänomen unserer Lebenswelt. Der Weg war eingeschlagen mit der Frage:

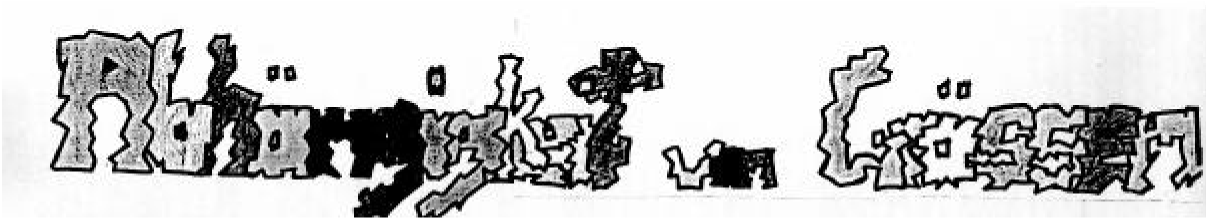
Welche Abhängigkeiten zwischen Größen kennt Ihr?

Die acht Jugendlichen stellten Alltagsbereiche zusammen, in denen ihnen Abhängigkeiten spannend vorkamen. Als erstes Produkt entstanden vier Plakate, auf denen Abhängigkeiten von Größen zusammengetragen sind zu den Themen *Preise und Rabatte*, *Zeitliche Entwicklungen*, *Leistungen von Komprimierungsprogrammen* und *Pizzen und ihre Preise*. Als Wegweiser beim Erstellen dienten die Fragen:

- Um welche Größen handelt es sich in Euren Beispielen?
- Von welcher Art ist die Abhängigkeit?

Die Schüler/innen erstellten Plakate mit Tabellen, Graphiken und beschreibendem Text.

Bei der Auswertung der Plakate standen die unterschiedlichen Typen von Abhängigkeiten und ihre qualitativen Unterschiede zur Diskussion. Das Ziel dabei war, die Grundvorstellun-



gen der Lernenden zu *Abhängigkeiten zwischen Größen* im Unterrichtsgespräch präsent zu bekommen und daran anschließend den Begriff der funktionalen Abhängigkeit als eine spezielle Mathematisierung dieser allgemeinen Grundvorstellungen zu erarbeiten. Welche Berge es auf unserem Weg in die Mathematik zu erklimmen galt, wird beim Sichten und Ordnen der Plakate in den folgenden Schüleräußerungen deutlich:

- „Klar, der Preis von Quark hängt von der Anzahl der Päckchen ab. Na toll, das wusste ich auch schon vorher."
- „Aber ist denn das bei den Aktien überhaupt eine Abhängigkeit? Ich weiß ja gar nicht, wie hoch morgen die Aktie steht. Beim Quark da weiß ich ja wenigstens, was ich für einen bezahlen muss und kann daraus sogar mit Rabatt den Preis für 10 berechnen!"
- „Es geht doch nicht um Vorhersagbarkeit, oder? Der Aktienkurs hängt doch trotzdem vom Tag ab, an dem er erhoben wird."

  ...

Der erste Gipfel war avisiert: *Hat Abhängigkeit schon immer etwas mit Vorhersagbarkeit oder Berechenbarkeit zu tun?* Die Antwort der Gruppe war erst in einem längeren Prozess in der Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Beispielen zu gewinnen: Nein! Trotzdem blieb nach anstrengendem Aufstieg die gute Aussicht:

> „Wenn´s vorhersagbar ist, dann ist´s besonders schön."

Der zweite Aufstieg musste an der Abhängigkeit zwischen dem Preis einer Pizza und der Anzahl ihrer Beläge angegangen werden:

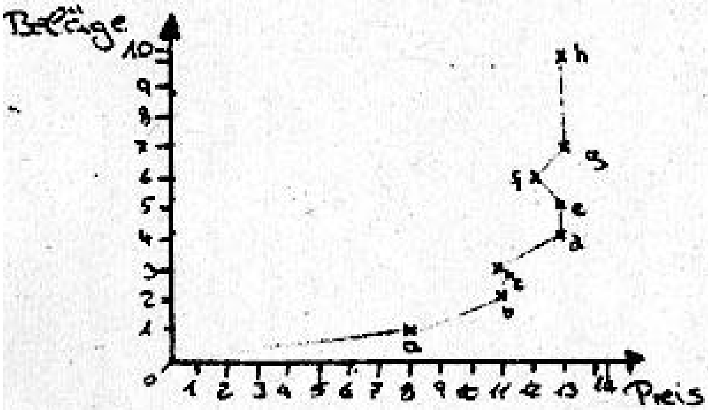
> „Irgendwie hängt der Preis der Pizza ja schon von der Anzahl der Beläge ab, aber so richtig festliegen tut er ja nicht."

Am Graphen war dies schön durch „übereinanderliegende Punkte" zu sehen, wie die Schülerinnen und Schüler das nannten. Nach einer kurzen Pause am Fuß des Berges konnten wir den zentralen Unterschied zwischen *Abhängigkeit* im allgemeinen Sinne und *eindeutigem Festliegen* einer Größe aufgrund der Kenntnis der anderen herausarbeiten. Auf diesem Berg hatten die Mathematiker bereits das Gipfelkreuz eingerammt:

> *Abhängigkeiten, bei denen eine Größe schon aufgrund der anderen Größen eindeutig festliegt, nennt man funktionale Abhängigkeiten.*

In der nächsten Unterrichtsphase wurde die Gegend erkundet: Die Abhängigkeitsbegriffe wurden sortiert und an Beispielen erprobt, der mathematische Begriff der funktionalen Abhängigkeit wurde dabei als ein Konzept einsortiert und in seiner Tragweite erspürt. Wie wichtig dabei eine Auseinandersetzung mit den Grundvorstellungen von Abhängigkeit ist, versuchen wir an dem folgenden Gespräch zu verdeutlichen:

	Preis	Anzahl der Beläge	Preis	Anzahl der Beläge	
a	8DM	1	13DM	5	e
b	11DM	2	12DM	6	f
c	11DM	3	13DM	7	g
d	13DM	4	13DM	10	h



Pizzas

Jede Pizza mit Tomaten und Käse

			klein Ø 26	groß Ø 32	Familie 45x32	Party 60x40
a	1.	Margherita	8,00	10,00	18,00	25,00
	2.	Salami	10,00	12,00	22,00	28,00
	3.	Schinken				
	4.	Hackfleisch				
	5.	Champignon				
	6.	Peperoniwurst				
	7.	Grüne Peperoni und Paprika	11,00	13,00	23,00	29,00
b	8.	Artischocken und Pilze				
	9.	Schinken und Pilze				
c	10.	Tonno: mit Thunfisch,Zwiebel,Knoblauch				
	11.	Salami und Pilze				
f	12.	Vegetarisch: Pilze,Paprika,Zwiebel,Peperoni,Mais,Broccoli	12,00	14,00	25,00	30,00
	13.	Astra: Schinken,Pilze,Ananas und frische Tomaten				
	14.	Mexikana: Peperoniwurst,Paprika,grüne Peperoni,scharf				
	15.	Twingo: Salami, Schinken,Pilze				
	16.	Hawaii: Schinken,Ananas,Curry				
	17.A	-NEU- Holländisch: Schinken,Broccoli,Soße Holländisch				
e	18.	Salami Schinken,Champignon,Oliven,grüne Peperoni	13,00	15,00	28,00	35,00
	19.	Hackfleisch Zwiebel,Salami,Pilze,Schinken				
	20.	Averi: Hackfleisch, Zwiebel,Pilze,Ananas,grüne Peperoni				
	21.	Calzone (gefüllt):Salami,Schinken,Hackfl.,Pilze,grüne Peperoni	13,00	15,00		
	21.A	Calzone Spezial (gefüllt): Salami,Schinken,Hackfleisch, Pilze,Zwiebel,Paprika,grüne Peperoni	14,00	16,00		
	21.B	Calzone vegetarisch (gefüllt): Pilze,Zwiebel,grüne Peperoni, Paprika,Mais und Broccoli	14,00	16,00		
d	22.	Peperoniwurst Sardellen,Kapern,Oliven	13,00	16,00	28,00	35,00
	23.	Thunfisch Pilze,Zwiebel,Oliven,Artischocken				
	24.	Zwiebel Salami,Sardellen,Paprika,Kapern,Oliven				

Pizzamatic.de

Hannah: „Aber es besteht doch gar keine Abhängigkeit zwischen der Person und ihrer Körpergröße. Ich weiß doch gar nicht warum die Lilly so viel kleiner ist als ich. Es hängt ja gar nicht von der Lilly ab, sondern vielleicht von der Größe ihrer Eltern...“

L: „Aber die Körpergröße liegt doch für die Person fest, ich kann sie sogar bestimmen. Es geht ja nicht darum, die Gründe für die Abhängigkeit zu kennen.“

Hannah: „Ach so, ja stimmt. Aber wenn die Person nicht da ist, dann kann ich die Größe ja nicht bestimmen, wie beim Fruchtquark – da weiß ich den Preis für einen und kann daraus auf alle anderen Anzahlen schließen.“

Lilly: „Das stimmt, trotzdem liegt die Größe der Person fest, unabhängig davon, ob du sie bestimmen kannst. Das haben wir doch bei den Aktienverläufen schon diskutiert, dass man nicht unbedingt Vorhersagen treffen kann.“

Hannah: „Ok gut. Dann sind das hier aber alles funktionale Abhängigkeiten.“

Lilly: „Aber die Franni hat doch sieben Telefonnummern, da liegt doch keine eindeutig fest.“

Hannah: Ja aber dann kann ich doch der Franni die Liste dieser sieben Nummern zuordnen. ... Aber es sind sieben, aber unter einer von den sieben, weiß ich dann, kann ich sie erreichen.

Lilly: Aber ist das nicht wie bei der Pizza, ...

Unsere Reise hat uns von Alltagskonzepten zu Abhängigkeit zum Konzept der funktionalen Abhängigkeit geführt. Der Begriff der Funktion wird in diesem Zugang nicht mathematisch definiert, sondern schleicht sich mit der Funktionsvorschrift in das Denken ein. Dies hat den Vorteil, dass so an außermathematische Vorverständnisse der Schüler/innen angeknüpft werden kann, die im traditionellen Zugang oft verschüttet werden oder ungenutzt bleiben. Schülerfragen wie „Wieso bin ich eigentlich an einer solchen Funktionsvorschrift interessiert?“ und die Schülerantwort „Weil ich dann den schönen Fall der Vorhersagbarkeit habe!“ weisen auf eine Nachdenklichkeit im Umgang mit Mathematik hin, die zu bilden es sich lohnt.

Auch im weiteren relativ klassischen Unterrichtsverlauf konnten immer wieder Brücken zum Alltagsverständnis geschlagen werden. Dies stiftet Sinn, da mathematische Konzepte als spezifische Mathematisierungen von allgemeinen Konzepten von den Lernenden so in ihrem Beitrag zur Erschließung von Welt erarbeitet werden können.

Zum Erzeugen von Nachdenklichkeit sind oft gar nicht die großen Entwürfe nötig. Es geht auch im Kleinen, die Alltagskultur der Lernenden ernst zu nehmen und ihr beim Lernen Raum zu geben. Dafür muss der Unterricht Zeit bereitstellen und eine offene Diskussionskultur pflegen, in der die sonst oft negativ belegten „Schwierigkeiten mit dem logischen Denken“ als ganz wichtige Anlässe zum Lernen gewürdigt werden (vgl. Freudenthal 1982). Dadurch wird ein Orientierungs- und Reflexionswissen erworben, das nicht zuletzt auch für das innermathematische Lernen von unschätzbarer Bedeutung ist.

3. Mathematische Spuren in der Arbeitswelt – Mathematische Archäologie

Mathematikunterricht legitimiert sich vor allem durch den meist unhinterfragten Verweis auf die Bedeutung der Mathematik in unserer Welt. Dabei ist nur ein geringer Teil der Mathematik in unserer Welt direkt erfahrbar, wie Heymann prägnant auf den Punkt gebracht hat: „Mathematik ist Teil unserer Welt und zugleich in ihr verborgen.“ (Heymann 1996, S. 183). Der offenbare Teil liegt auf der Ebene der mathematischen Alltagskultur, während etwa mathematikhaltige politische Argumentationen oder mathematische Hintergründe moderner Technologie schwerer aufzufinden sind. Deswegen ist der abstrakte Verweis auf die Bedeutung der Mathematik für Schüler/innen oft wenig sinnstiftend, ebenso wenig wie „Anwendungsaufgaben“ aus Bereichen, die für die Lernenden genauso fremd sind wie die zu erlernende Mathematik. Wenn aber Aufgabe mathematischer Bildung ist, die Bedeutung des mathematischen Zugangs zur Welt erkennen und einschätzen zu können, dann sollten Schüler/innen lernen, die verborgene Mathematik in ihrer eigenen Lebenswelt aufzudecken. Als Ausgangspunkt für einen solchen Prozess der mathematischen „Archäologie“ (vgl. Skovsmose 1998) haben wir die Lernenden daher aufgefordert, in ihrem zweiwöchigen Berufspraktikum möglichst vielschichtige „mathematische Spuren“ aufzufinden. Dazu sollten sie Arbeitsmaterialien genauer anschauen oder Gespräche mit Kollegen führen, was sie wirklich an Mathematik über die vier Grundrechenarten hinaus bei ihrer Arbeit benutzen. Konkret sollten sie einen archäologischen Report zu folgenden Fragen formulieren:

- „Welche mathematischen Berechnungen, Begriffe, Sätze und Verfahren werden in dem Bereich gebraucht und wozu?
- Welche Rolle spielt die Mathematik dabei genau: Wird sie genutzt, um *Realität zu beschreiben* (wie beim Erfassen von Zuordnungen oder Wachstumsprozessen aus dem Alltag durch mathematische Funktionen) oder um *Realität zu schaffen* (wenn z.B. die Bank die Zinsen mit Hilfe der Zinseszinsformel bestimmt)?
- Welche Denkweisen sind Euch begegnet, die zwar nicht nur mathematische Denkweisen sind, aber im Mathematikunterricht geschult werden können, weil sie eng mit mathematischem Denken zu tun haben (z.B. strukturieren, ordnen, analysieren, argumentieren....)? In welchen Zusammenhängen waren sie wichtig?“ (Aus dem an die Schüler/innen ausgegebenen Arbeitsauftrag)

Die ersten Berichte der Schüler/innen waren ausgesprochen mager. Es ist den Zehntklässlern sehr schwer gefallen, Mathematisches jenseits von Preiskalkulationen zu identifizieren, in denen lediglich die vier Grundrechenarten vorkamen. Sehr deutlich trat dabei ihre fehlende Erfahrung in solcherart Reflexionen und auch ihr Bild von Mathematik zu Tage, das sich auf das Hantieren mit Zahlen im Sinne einfacher, eindeutig lösbarer Berechnungen beschränkt.

Im gemeinsamen Nachdenken über einzelne Berichte konnten wir dann jedoch die Themen erreichen, an denen es spannend wird, eine solche mathematische Archäologie zu betreiben, z.B.:

- Welches mathematische Wissen muss ein 3D-CAD-Programm im Hintergrund haben? Wie viel davon braucht der Nutzer, wie viel nur der Entwickler?
- Wie lassen sich Straftaten quantitativ in Geldstrafen und Gefängnistagen aufwiegen? Wozu hat der Richter hier so viel Entscheidungsspielraum? Wieso wird Strafe überhaupt so quantifiziert?
- Was hilft es den Meeresbiologen, Wachstumsprozesse von Bakterienkulturen mit mathematischen Mitteln zu beschreiben?
- Wie kommt es, dass in fast allen Bereiche, in denen durch Mathematik Realität erst geschaffen wird, Geld im Spiel ist? (Renten, Preise, soziale Ausgleichsformeln,...) Welche Funktion hat das Geld dabei genau, welche Rolle spielen die mathematischen Berechnungen?

Gerade die Diskussion um die Funktion, den Nutzen und die Grenzen des jeweiligen Einsatz mathematischer Mittel anhand der von Ihnen erlebten Bereiche der Arbeitswelt war für die Schüler/innen plötzlich sehr wichtig. Sie erlebten nun, dass die Suche nach mathematischen Spuren nicht nur eine aufgesetzte Praktikumsaufgabe ist, sondern sich lohnt, um die Rolle der Mathematik in unserer Welt besser zu verstehen. Überrascht waren sie vor allem über die Erkenntnis, wie durchdrungen unser Alltag und die Arbeitswelt von den Quantifizierungen von Leistungen und Waren durch Geld ist. Das Projekt konnte hier einen Anstoß geben zur Entwicklung einer Reflexionskultur, die im Unterricht weiter gepflegt werden muss.

4. Nachdenklichkeit im Unterrichtsalltag

Die beiden vorgestellten Projekte weisen eine mögliche Richtung, wie durch mehr Nachdenklichkeit im Unterricht ein wichtiger Beitrag zur Sinnfrage geleistet werden kann (vgl. auch Freudenthal 1982). Umgekehrt können Sinndiskussionen als Ausgangspunkte für das vertiefte Begreifen von mathematischen Konzepten dienen, die zum Standardstoff des Lehrplans gehören, wie etwa der Funktionsbegriff.

Ihre Wirksamkeit können solche Ansätze besser entfalten, wenn sie eingebettet sind in einen nachdenklichen Unterrichts*alltag*, in dem an vielen kleinen Stellen Sinnfragen ihren Platz haben und an das Denken der Lernenden angeschlossen wird. Es bedarf dazu keiner großen Revolution, sondern des Mutes und der Kreativität, mehr Nachdenklichkeit im Kleinen anzuregen. Das ist die Vision, für die wir gerne weiter arbeiten wollen.

5. Literatur

Freudenthal, Hans (1982): Mathematik – eine Geistesverfassung, in: Die Grundschule 14 (4), S. 140ff

Heymann, Hans Werner (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz Verlag, Weinheim 1996.

Lengnink, Katja (2002): Wie Jugendliche über Abhängigkeit reden. Anknüpfungspunkte für eine Einführung in den Funktionsbegriff, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim.

Prediger, Susanne (2002): Wehe zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim.

Skovsmose, Ole (1998): Linking Mathematics Education and Democracy, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (30) 6, 195-203.

Wagenschein, Martin (1977): Verstehen lehren. Genetisch - Sokratisch - Exemplarisch, Beltz, Weinheim.