Susanne PREDIGER, Darmstadt

Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht

In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Franzbecker, Hildesheim, S. 399-402.

> „Bildung ist eine Geistesverfassung, Ergebnis eines nachdenklichen Umgangs mit den Prinzipien und Phänomenen der eigenen Kultur.“ (v. Hentig)

Hartmut von Hentig hat Nachdenklichkeit als wichtige Eigenschaft gebildeter Menschen herausgestellt [6]. Nachdenklichkeit meint nicht nur die intellektuelle *Tätigkeit* und Fähigkeit des Nachdenkens, d.h. des Erfassens, Hinterfragens und Begründens mathematischer Zusammenhänge, sondern eine *Grundhaltung*, die geprägt ist durch „Wachheit für Fragen“ (v. Hentig), d.h. die Bereitschaft und das Zutrauen, aus eigenem Antrieb Fragen zu stellen und Antworten zu suchen. Weil Nachdenklichkeit in diesem Sinne *ein* zentrales Element von Bildung ist, sollte ihr im Mathematikunterricht mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden.

1. Auf was soll und kann sich Nachdenklichkeit im MU beziehen?

Inhalt des Nachdenkens im MU ist vorrangig die Mathematik selbst. Forderungen nach mehr Nachdenken und Reflexion über Mathematik werden allerdings oft abgewehrt mit dem Hinweis auf die intellektuelle Überforderung der Schüler/innen oder dem Verweis auf fehlende fachliche Grundlagen. Dahinter steht das Missverständnis, dass mit Reflexion immer wissenschaftstheoretische Überlegungen oder metamathematische Diskussionen gemeint sind. Neubrand hat dagegen herausgestellt, dass Nachdenken auch im Kleinen ansetzen kann, nicht nur an großen Fragen. Er hat unterschiedliche Ebenen des Sprechens und Nachdenkens über Mathematik ausgemacht, auf den denen parallel gearbeitet werden kann [4]:

- Wissenschaftstheoretische Ebene
- Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens
- Ebene des bewussten Handwerkens
- Ebene der mathematischen Gegenstände und Inhalte

2. Nachdenklichkeit vermitteln: Wie soll das gehen?

Die kurze Antwort: gar nicht. Zwar können gewisse *Inhalte* des Nachdenkens im direkten Sinne vermittelt werden, die *Grundhaltung* der Nachdenklichkeit dagegen lässt sich nicht einfach „beibringen“.

Gleichwohl können gezielte Angebote, die zum Nachdenken über Mathematik anregen, langfristig zum Aufbau einer entsprechenden Haltung beitragen. Dazu gibt es in der didaktischen Theorie und Praxis bereits einige Ansätze und Konzepte, z.B. die sokratische Methode nach Nelson oder Neubrands Konzept des Sprechens über Mathematik. In den letzten Jahren sind reflexionsorientierte *Aufgaben* stark in der Diskussion: offene Aufgaben, Rechengeschichten, Umkehraufgaben, offene Mathematisierungsaufgaben, „Die etwas andere Aufgabe" (Herget), metamathematische Aufgaben (Sjuts), Fehlersuchaufgaben, „Nimm Stellung" (Herget), mathematische Aufsätze (Gallin/Ruf u.a.) (vgl. [2] für einen kommentierten Überblick). All diese Ansätze leisten einen wichtigen Beitrag zum Aufbau von Nachdenklichkeit, weil sie Fragen auf den genannten Reflexionsebenen überhaupt als Unterrichtsgegenstand etablieren.

3. Nachdenklichkeit heißt eigene Fragen stellen!

Durch Veränderung der Aufgaben und der im Unterricht behandelten Fragestellungen allein löst man aber ein Problem nicht: Echte Nachdenklichkeit beinhaltet nicht nur, auf Fragen der Lehrkraft zu antworten, sondern *selbst* echte Fragen zu haben und das *Bedürfnis*, ihnen gründlich nachzugehen. Was für kleine Kinder selbstverständlich ist, bleibt längst nicht bei allen Schüler/innen als Haltung erhalten. Der ‚Wiederaufbau' der Wachheit für Fragen gelingt nicht allein, indem Lernende sich mit Fragen beschäftigen müssen, die die Lehrkraft gestellt hat. Wie also erreichen wir, dass die Lernenden sich Fragen zu eigen machen und selbst zu fragen beginnen?

Stärker noch als durch die Aufgabenkultur wird diese Haltung durch eine offene, vertrauensvolle Unterrichtskultur gefördert, in der Schülerfragen explizit erwünscht sind. Darüber hinaus sollten sich bietende Chancen für ein nachdenkliches Gespräch konsequent aufgegriffen werden. Das *Prinzip des situativen Aufgreifens von Reflexionschancen* ermöglicht insbesondere, Fragestellungen auf höheren Reflexionsebenen, z.B. die des Hinterfragens mathematischen Arbeitens, situationsgebunden anzubinden an das eigene Denken und die Fragen der Lernenden (siehe [5] für Beispiele und Ausführlicheres). Situativ aufgreifen kann eine Lehrkraft aber nur, was sie als Chance überhaupt wahrnehmen kann. Um die dazu notwendige Sensibilität zu entwickeln, ist es notwendig, verschiedene Varianten vorhandener Nachdenklichkeit auszumachen bzw. mögliche Zugänge zu nachdenklichen Fragestellungen anzubieten. Hilfreich ist dazu Bauers Unterscheidung in vier Formen mathematikbezogener Reflexion:

1. *Inhaltsreflexion*, d.h. ein „auf mathematische Inhalte und Themen sich richtendes bewußtes, prüfendes Nachdenken und Überlegen, ein sich Vertiefen in Mathematik, [...], ein verständiges Betreiben von Mathematik"
2. *Gegenstandsreflexion,* d.h. die „Reflexion über Entwicklungslinien, Strukturmerkmale, Erscheinungsformen, Grundlagenfragen der Mathematik. Die Reflexion richtet sich auf das Wesen der Disziplin Mathematik."
3. *Bedeutungs- und Sinnreflexion*, d.h. „Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischen Denkens, über die Bedeutung der Mathematik und über den Sinn ei-

ner Beschäftigung mit Mathematik. Im Zentrum stehen dabei Bedeutungseinheiten, Zweckbezüge, Sinnzuschreibungen.“,
4. *Selbstreflexion*, d.h. Reflexion über die Bedeutung des Gegenstandes Mathematik für die eigene Person: Sie „betrachtet, analysiert, prüft auf einer Metaebene die eigene Beziehung zur Mathematik.“ ([1], S. 6/7)

Während die Unterscheidung der ersten beiden Formen mit Neubrands Ebenen kohärent ist, liegen die anderen beiden Formen quer dazu, weil Bauer nicht wie Neubrand im Hinblick auf das Fach, sondern im Hinblick auf die Beziehung von Fach, Mensch und Welt systematisiert.

Zentrale These dieses Beitrags ist, dass für die Entwicklung einer Haltung der Nachdenklichkeit bei den Lernenden insbesondere die Selbst- sowie die Bedeutungs- und Sinnreflexion angeregt und gefördert werden sollte. Denn eigene Fragen setzen authentische Betroffenheit voraus.

Sowieso nachdenkliche Schüler/innen wenden sich auch der Inhalts- und Gegenstandsreflexion zu. Wie aber erreicht man diejenigen Lernenden, die nachdenken vermeiden, weil sie nicht wollen oder es sich in Mathematik nicht zutrauen? Für sie lassen sich Zugänge zur Nachdenklichkeit eher über Selbst- oder Sinnreflexion finden. Denn „Wozu sollen wir das lernen?“ und „Was hat das mit mir zu tun?“, fragen auch sie. Werden diese Fragen nicht als unangenehme Störung verstanden, sondern ernsthaft aufgegriffen und ausdifferenziert, so bieten sie wichtige Anlässe für gemeinsames, echtes Nachdenken mit hohem Bildungswert (vgl. [1], [3]).

Im Gegensatz zu Bauers Konzeption sollten aber auch Sinn- und Selbstreflexion nicht nur an den ganz großen Fragen ansetzen, sondern auf allen Neubrand’schen Ebenen angesiedelt werden, je nachdem, welche der Situation gerade angemessen ist. Zur Konkretisierung zeigt die Tabelle auf der nächsten Seite beispielhaft Fragestellungen, die das Nachdenken über exponentielles Wachstum auf verschiedenen Ebenen und mit verschiedenen Zugängen anregen können. Sie stellen Beispiele für mögliche Facetten dar, die sich aus den globalen Sinnfragen der Schüler/innen herausschälen lassen, sollen aber keinesfalls Kästchen für Kästchen abgearbeitet werden. Fragen der zweiten und dritten Spalte eröffnen bei sensiblem Aufgreifen auch Wege zu authentischen eigenen Fragen auch in der ersten Spalte.

Fazit: Mathematik als eine Schule der Nachdenklichkeit sollte auf Nachdenklichkeit nicht nur in Bezug auf Mathematik zielen, sondern auf ihre Bedeutung sowie das Verhältnis von Mathematik und Mensch. Gerade für den Aufbau einer nachdenklichen *Haltung* scheinen die Inhalte der *Allgemeinen Mathematik* [7], also die Reflexion der Mathematik in ihren Sinngebungen und Bedeutungen, Zwecken und Geltungsansprüchen, zuweilen geeigneter als die Mathematik selbst, weil die notwendige Kategorie der individuellen Betroffenheit leichter zu realisieren ist und so Wege zur Nachdenklichkeit eröffnen.

Wege zum Nachdenken auf 4 Ebenen an Beispielen zum exponentiellen Wachstum

	Gegenstands- und Inhaltsreflexion	Bedeutungs- und Sinnreflexion	Selbstreflexion
Ebene der mathe-matischen Gegen-stände und Inhalte	Was ist exponentielles Wachstum? Was sind die Unter-schiede zu anderen Wachstumsformen? Wie lautet die Funkti-onsvorschrift?	Wo kommen exponen-tielle Wachstumsprozes-se im Alltag vor? In welchem Sinne geht es bei exponentiellem Wachstum um gleich-mäßiges Wachstum?	Wo habe ich Schwierigkei-ten mit dem Begriff des exponentiellen Wachs-tums? Was fällt mir leicht? Wieso?
Ebene des bewussten Hand-werkens	Wie kann man expo-nentielles Wachstum in den versch. Reprä-sentationsformen (Wertetabelle, Graph, Formel, verbale Be-schreibung) darstellen bzw. identifizieren?	Was bringt (mir) die Be-schreibung von Wachs-tum in unterschiedlichen Repräsentationsformen? Wozu die Funktionsvor-schrift? Was hilft es, einen Prozess als expo-nentiell zu identifizie-ren?	Berichtigung der Klassen-arbeit: „Was ich hier ei-gentlich gedacht hatte, war... Das entspricht nicht der mathematischen Vor-gehensweise, weil..."
Ebene des Hinter-fragens mathe-matischen Arbeitens	Was sind Chancen und Grenzen der Erfassung realer Wachstumsprozesse durch Exponential-funktionen? (Stichwort Prognosen)	Wieso will man (soll ich) überhaupt Wachs-tumsprozesse mit ma-thematischen Funktio-nen erfassen? Wo ist dies nicht be-deutsam?	Was hat mein Denken über und meine Erfahrung mit Wachstumsprozessen mit ihrer mathematischen Er-fassung zu tun? Welche Vorstellungen von Gleich-mäßigkeit habe ich, welche ist hier erfasst?
Wissen-schafts-theore-tische Ebene	Wo wird Mathematik hier als Mittel zur Be-schreibung von Reali-tät benutzt, wo wird Realität geschaffen?	Welche Rolle nimmt Mathematik in der Ge-sellschaft ein, wenn mit Exponentialfunktionen prognostiziert wird?	Welche Auswirkungen hat die gesellschaftliche Ver-wendung dieser mathema-tischen Mittel für mich?

Literatur

[1] Bauer, L. (1990): MU und Reflexion, in: mathematik lehren 38, 6-9.
[2] Kaune, C. (2001): Weiterentwicklung des MUs: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe", in: Der MU (35), 35-46.
[3] Lengnink, K. / Prediger, S.(2000): Mathematisches Denken in der Linearen Algebra, in: ZDM 32 (4), 111-122.
[4] Neubrand, M. (1990): Über Mathematik sprechen - Möglichkeiten und Beispiele aus der Analysis, in: Glatfeld, M. (Hg.): Finden, Erfinden, Lernen, Lang, Ffm, 62-83.
[5] Prediger, S. (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen, in JMD 22(2), 123-144. (online unter http://www.mathematiktu-darmstadt.de/~prediger).
[6] von Hentig, H. (1980): Die Krise des Abiturs und eine Alternative, Klett, Stuttgart.
[7] Wille, R.(1995): Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule, in: Biehler, R. u.a. (Hg.): Mathematik allg.bildend unterrichten, Aulis, Köln, 41-55.