

Klausur zu MB II/III am 23.03.2010

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigegefügt Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.

Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist. Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$42 + 7 \text{ Sonderpunkte} = 49 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Klausur ist bestanden, wenn 23 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								

Aufgabe 1

Wir möchten zur Funktion $f(x) = -x e^{-x}$ das Integral

$$\int_{-3}^{-1} f(x) dx$$

bestimmen.

Geben Sie (begründet) eine zu verwendende Schrittweite $h > 0$ so an, dass der entstehende Fehler bei Verwendung der **summierten Trapezregel** kleiner ist als $5 \cdot 10^{-2}$.

Hinweis: Sie dürfen an geeigneter Stelle einen Taschenrechner benutzen. Nutzen Sie Vorzeichen und Monotonieeigenschaften von Ableitungen der Funktion f aus.

Aufgabe 2

(Handrechnung, kein Taschenrechner!)

Bilden Sie zu den Daten $(0, -4)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ den natürlichen, kubischen Spline direkt aus der Variationsaufgabe, d.h. mit Hilfe von Elementsteifigkeitsmatrizen.

Aufgabe 3 (Handrechnung, kein Taschenrechner!)

Gegeben seien der Vektor $\underline{x} = (1, -1, 2)^T$ und die Matrix

$$A := \underline{x} \underline{x}^T.$$

- (a) Ermitteln Sie $\|A\|_2$.
- (b) Führen Sie zwei Iterationen mit dem von-Mises-Verfahren (Potenzmethode) durch. Verwenden Sie als Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, und geben Sie in jedem Iterationsschritt den Rayleigh-Quotienten als Näherung für den betragsgrößten Eigenwert an.

Aufgabe 4

(Handrechnung, kein Taschenrechner!)

- (a) Skizzieren Sie die Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- (b) Berechnen Sie die Fläche der Ellipse aus (a) durch geeignete Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

- (c) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^3}{16} = 1$$

durch geeignete Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 5

(Handrechnung, kein Taschenrechner!)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\underline{y}' = A\underline{y} + r(x)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}(x) = \begin{pmatrix} 1 - 10x \\ 1 - 2x \\ 4x \end{pmatrix}.$$

Hinweise: I. Ein Eigenwert von A lautet -2 .

II. Verwenden Sie zur Bestimmung einer inhomogenen Lösung einen Ansatz der Form $\underline{y}^* = \underline{a} + \underline{b}x$ mit $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$. Die entstehenden Gleichungssysteme lassen sich durch Hingucken lösen.

Aufgabe 6**(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**Auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ betrachten wir die Funktionen

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x$$

zusammen mit dem (Integral-)Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) (1 - x^2) dx.$$

- (a) Überführen Sie u_1, u_2 in ein Orthonormalsystem v_1, v_2 auf folgende Weise (Verfahren von Gram-Schmidt):

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \quad \tilde{v}_2 = u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1, \quad v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2.$$

- (b) Geben Sie die beste Approximation der Funktion $h(x) = x - x^2$ im Raum der Polynome 1. Grades an bzgl. der Norm, die durch das obige Skalarprodukt induziert wird, d.h. gesucht ist $p \in \mathbb{P}_1$ mit der Eigenschaft

$$\|h - p\| = \left(\int_{-1}^1 (h(x) - p(x))^2 (1 - x^2) dx \right)^{1/2} = \min!$$

Aufgabe 7 (Handrechnung, kein Taschenrechner!)

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = 4x\sqrt{y} - (y')^2 + 4x + 6, \quad y(1/2) = 9/4, \quad y'(1/2) = 3,$$

in ein System 1. Ordnung um, und führen Sie zur Schrittweite $h = 1$ einen Schritt mit dem Halbschrittverfahren durch zur Berechnung einer Näherungslösung an der Stelle $3/2$.

Die exakte Lösung lautet $y(x) = (x+1)^2$. Warum sollte obige Rechnung das exakte Ergebnis als Näherung für den Funktionswert produzieren?

