Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Klausur zu MB II/III am 16.09.2009

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigefügten Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.

Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist. Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$42 \;+ 7 \text{ Sonderpunkte } = \; 49 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Klausur ist bestanden, wenn 23 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch den Graphen der Funktion

$$f : \overline{K}_1(\vec{0}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Dabei ist $K_1(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis.

a) Berechnen Sie
$$\int_F \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix} d\vec{x}.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_F \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, do.$$

c) Die Fläche F und die Ebene $z = 1$ schließen ein Volumen V ein. Berechnen Sie $|V|$.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$2y + \frac{y}{x} + (x + 1 + \frac{e^y}{x})\, y' = 0, \quad y(1) = 0.$$

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = -200y$, $y(0) = 1$.

a) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Iterierte y_n des expliziten Euler-Verfahrens in Abhängigkeit vom Startwert $y_0 = y(0)$ an. Ist das explizite Euler-Verfahren bei Verwendung der Schrittweite $h = 1/100$ absolut stabil? Begründung!

b) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Iterierte y_n des Crank-Nicholson-Verfahrens zur Schrittweite $h = 1/10$ in Abhängigkeit vom Startwert $y_0 = y(0)$ explizit an, und begründen Sie, ob das Verfahren absolut stabil ist.

Aufgabe 4

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

soll gelöst werden.

a) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $\underline{x}_0 = \underline{0}$, zwei Iterationen mit dem (normierten) Gesamtschrittverfahren durch.

b) Begründen Sie mit Hilfe des Spektralradius der Iterationsmatrix, dass das (normierte) Gesamtschrittverfahren konvergiert.

c) Nach wieviel Iterationen ist mit dem (normierten) Gesamtschrittverfahren spätestens ein Fehler kleiner als 10^{-3} erreicht? Startwert sei wieder $\underline{x} = \underline{0}$. Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage die Spaltensummennorm. Ein Taschenrechner darf hier benutzt werden.

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Das Wärmeleitungsproblem

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = |x-1|, \quad u(0,t) = 1+t^2, \quad u(2,t) = (t+1)^2$$

soll mit dem α-Verfahren mit Wahl von $\alpha = 1/4$ und (Orts-)Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Gesucht ist die Lösung im Punkt $(1,1)$. Verwenden Sie ein Gitter mit möglichst wenig Punkten.

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Geben Sie die Lösung des Eigenwertproblems

$$y'' + (\lambda - 1)\, y + 2y' = 0, y(0) = y(1) = 0$$

durch eine geeignete Fallunterscheidung nach λ an.

Aufgabe 7 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

a) Für $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\}$ ist je eine Lösung gesucht des

(i) äußeren Dirichletschen Problems,

(ii) inneren Neumannsches Problems,

jeweils unter der Randbedingung

$$u(2\cos\varphi, 2\sin\varphi) = 1 - 12\,\sin^2\varphi + \frac{1}{4096}\,\sin(24\varphi).$$

Hinweis: Schreiben Sie $\sin^2\varphi$ geschickt um.

b) Ist ein lineares Mehrschrittverfahren instabil, weil $z_1 = -\,\frac{1}{2},\ z_{2,3} = \frac{4}{5} \pm i \cdot \frac{3}{5}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind? Begründen Sie Ihre Antwort.