Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Klausur zu MB II/III am 24.03.2009

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigefügten Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.
Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist. Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$42 \ + 7 \text{ Sonderpunkte } = \ 49 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Klausur ist bestanden, wenn 23 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{x^2}{y} + 2\cos x + y^2 + \left(\frac{2\sin x}{y} + 3xy\right) y' = 0, \quad y(\pi) = \pi^{2/3}.$$

(a) Begründen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist oder nicht.

(b) Es existiert ein integrierender Faktor, der nur von y abhängt. Bestimmen Sie diesen.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an durch Verwendung der Methode der sukzessiven Integration zur Bestimmung eines Potenzials (einer Stammfunktion).

(d) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4-4x \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Systems an.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $\vec{y}_p$ des inhomogenen Differentialgleichungssystems durch einen linearen Ansatz der Form

$$\vec{y}_p(x) = (ax+b, a, 0)^T, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

und lösen Sie das vektorielle Anfangswertproblem.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Im $\mathbb{R}^3$ werde aus einer Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und Radius 3 die Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und Radius 2 herausgeschnitten. Das resultierende Gebiet G ist eine Hohlkugel mit Außenradius 3, Innenradius 2 und Schalendicke 1. G wird beschrieben durch

$$\underline{x}(r,u,v) = \begin{pmatrix} r\cos v \sin u \\ r \sin v \sin u \\ r\cos u \end{pmatrix}, \quad 2 < r < 3, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi.$$

(a) Berechnen Sie

$$\int_G 15\,x^2\,dx\,dy\,dz.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\partial G} \frac{3}{4}\,z^2\,do.$$

Beachten Sie, dass ∂G aus 2 Teilen besteht. Tipp: Berechnen Sie das gesuchte Integral für eine Kugel mit Radius R.

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Es sei $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als die ungerade Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 \le x \le \pi, \end{cases}$$

nach $[-\pi, \pi]$.

(a) Geben Sie für f die beste Approximation im quadratischen Mittel im Raum der trigonometrischen Polynome vom Grade 1 auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ an.

(b) Entwickeln Sie die 2π-periodische Fortsetzung von f in eine Fourier-Reihe.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebisses aus (b) die Gültigkeit der Reihendarstellung

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots .$$

Hinweise: $\int x \sin(ax)\, dx = \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2}$, $\quad 0 \neq a \in \mathbb{R}$,

$$\sin(n\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{für } n = 2k-1. \end{cases}$$

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x + \frac{1}{y(x)}, \quad y(0) = 1,$$

soll ein Schritt mit dem impliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$ durchgeführt werden. Lösen Sie dazu folgende Aufgaben:

(a) Formulieren Sie den Schritt mit dem impliziten Euler-Verfahren.

(b) Die entstehende nicht-lineare Gleichung soll mit einem Schritt des Newton-Verfahrens gelöst werden. Formulieren Sie ein geeignetes Nullstellenproblem $F(z) = 0$.

(c) Führen Sie zur Bestimmung eines Startwertes für das Newton-Verfahren einen Schritt mit dem Halbschritt-Verfahren durch.

(d) Geben Sie die erste Newton-Iterierte an. Hierbei dürfen Sie einen Taschenrechner einsetzen.

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Zu den Daten

x	0	1	2	3
y	0	-5	10	15

konnte der natürliche, kubische Spline nur teilweise ermittelt werden als

$$s(x) = \begin{cases} -11x + ax^3, & 0 \le x < 1, \\ 16 - 59x + 48x^2 + bx^3, & 1 \le x < 2, \\ -96 + 109x - 36x^2 + cx^3, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Wie lauten die fehlenden Parameter a, b, $c \in \mathbb{R}$? Es genügt die Angabe der Parameter. Eine Probe, dass es sich bei dem Ergebnis tatsächlich um einen natürlichen kubischen Spline handelt, ist nicht erforderlich.

Aufgabe 7 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 9 & -1 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie unter Verwendung der LR-Zerlegung das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{b} = (2, 13, 17, 2)^T.$$