

Klausur zu MB I am 24.03.2009

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigegefügt Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.

Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist.

Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$30 + 5 \text{ Sonderpunkte} = 35 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Benutzung eines Taschenrechners ist nicht erlaubt!

Die Klausur ist bestanden, wenn 17 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1

Die Kurve C_1 sei gegeben durch den Graphen der Funktion

$$y(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Kurve C_2 sei definiert als die geradlinige Verbindung zwischen den Punkten $(1, 1)$ und $(0, 1)$, die Kurve C_3 als die geradlinige Verbindung von $(0, 1)$ nach $(0, 0)$. Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Berechnen Sie

$$\int_{C_2+C_3} \begin{pmatrix} y \\ 1 - x \end{pmatrix} d\vec{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{C_1+C_2} \begin{pmatrix} y \\ 1 + x \end{pmatrix} d\vec{x}.$$

(c) Geben Sie die natürliche Parameterdarstellung von C_1 an.

Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

Aufgabe 2

Welches Konvergenzintervall besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} x^k ?$$

Vergessen Sie nicht die getrennte Betrachtung der Endpunkte des Konvergenzintervalls.

Aufgabe 3

Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ um den Punkt $(-1, 1, 0)$ bis zur Ordnung 3 an.

Aufgabe 4

Lösen Sie folgende Aufgaben:

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^\alpha - (1-\alpha x)}{x^2}, \quad \alpha > 0.$$

- (b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

- (c) Zeigen Sie, dass die (stetige) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der entsprechende Differenzenquotient den Grenzwert 0 hat, für die Ableitung der Grenzwert für $x \rightarrow 0$ jedoch nicht existiert.

Aufgabe 5

Welche Punkte der Kugel

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

haben vom Punkt $P = (1, 1, -1)$ minimalen Abstand?

