Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Klausur zu MB II/III am 10.09.2008

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigefügten Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.
Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist. Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$42 \ + 7 \text{ Sonderpunkte } = \ 49 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Benutzung eines Taschenrechners ist nicht erlaubt!

Die Klausur ist bestanden, wenn 23 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$3x^2 \sin y - y^2 \sin x + (x^3 \cos y + 2y \cos x + 3y^2)y' = 0, \quad y(0) = \pi \ ?$$

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Betrachten Sie das Flächenstück im 1. Quadranten, das durch die Graphen der Funktionen $z = 0.75x^2$ und $z = 0.5x^2 + 1$ und der Geraden $x = 0$ eingeschlossen wird. Welches Volumen V entsteht bei Drehung dieser Fläche um die z-Achse?

(i) Skizzieren Sie die Fläche.

(ii) Berechnen Sie V. Hinweis: Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Welche Eigenwerte besitzt diese Matrix?

(ii) Berechnen Sie $\det A$ und $\operatorname{spur} A$.

(iii) Zu welchem Eigenwert ist der Vektor $\underline{v} = (1, 0, 0, 1)^T$ Eigenvektor?

(iv) Können Sie einen komplexen Eigenvektor angeben?

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = y - (y')^2 - x, \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

in ein System 1. Ordnung um und führen Sie zur Schrittweite $h = 1/2$ zwei Schritte mit dem Halbschrittverfahren durch. Kontrollieren Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $y(x) = 1 + x$.

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Geben Sie für die π-periodische, gerade Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \pi\, x - x^2, \quad 0 \le x \le \pi,$$

die Fourier-Entwicklung an. Bestimmen Sie daraus die Reihenwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Hinweise: (1) $\displaystyle\int x\cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$,

(2) $\displaystyle\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x\cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax)$.

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Zu den Daten $(0, -1/3)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ ist der natürliche kubische Spline zu ermitteln.

(i) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der Ableitungswerte in den Knotenpunkten auf.

(ii) Geben Sie die LR-Zerlegung der Systemmatrix des Gleichungssystems an.

(iii) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der LR-Zerlegung.

(iv) Wie lautet die Lösung auf dem Teilintervall $[0, 1]$? Es muss nicht nach Potenzen von x sortiert werden

Aufgabe 7 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Zur Interpolation mit Polynomen höchstens 1. Grades auf dem Intervall $[-1;1]$ seien die Freiheitsgrade Γ_i, $i = 1, 2$, ausgewählt mit

$$\Gamma_1(f) = f(-1), \qquad \Gamma_2(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

(i) Geben Sie die kanonische Basis bzgl. der gewählten Freiheitsgrade an, d.h. bestimmen Sie 2 Funktionen N_1 und N_2 mit der Eigenschaft

$$\Gamma_i(N_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

(ii) Geben Sie mit Hilfe der Basisfunktionen N_1 und N_2 die Interpolierende von $g(x) = x^2$ im Raum der Polynome 1. Grades an.