Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Klausur zu MB II/III am 25.03.2008

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	Fach (B2 oder B3):

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigefügten Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.
Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist. Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$42 \ + 7 \text{ Sonderpunkte } = \ 49 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Klausur ist bestanden, wenn 23 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Das Funktional

$$J(u) = \int_{-1}^{2} [420\, u^2(x) + 24\, x\, u(x)]\, dx$$

soll unter den Nebenbedingungen

$$u(-1) = u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad u(2) = 0$$

minimiert werden. Als Freiheitsgrade werden auf jedem Teilintervall die des natürlichen kubischen Splines gewählt. Die Aufgabe soll (direkt aus der Variationsaufgabe) durch Transformation jedes Teilintervalls auf das Referenzelement $[0; 1]$ gelöst werden. Lösen Sie die folgenden Teilprobleme:

(i) Ersetzen Sie zunächst die Koeffizientenfunktion $f(x) = x$ durch den Integral-Mittelwert auf jedem Teilintervall. Formulieren Sie ein Ersatzproblem $\tilde{J}(u)$.

(ii) Bilden Sie die Elementmatrizen und -linearformen.

(iii) Bilden Sie jeweils die globale Matrix und die globale Linearform, und bilden Sie eine globale quadratische Form.

(iv) Wie lautet das zu lösende Gleichungssystem?

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Gegeben sei für $0 \le x \le 1$ das Anfangswertproblem

$$y^{(iv)} + y = x, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung an.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

c) Schreiben Sie das Anfangswertproblem in ein System 1. Ordnung um und zeigen Sie, dass dieses System eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{F=\partial B} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{F}.$$

Dabei ist $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$, F die Oberfläche von B.

Aufgabe 4

Mit Hilfe des Verfahrens des steilsten Abstiegs (bei exakter Liniensuche) soll das Minimum der Quadrik

$$Q(\underline{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

bestimmt werden.

1. Begründen Sie, dass das Verfahren konvergiert.
2. Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \underline{0}$ die erste Iterierte des Verfahrens.

Hinweis: $\lambda = 5$ ist Eigenwert einer von Ihnen anzugebenden Matrix A.

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi < t < 0, \\ t & \text{für} \quad 0 \leq t < \pi, \end{cases}$$

Unterscheiden Sie gegebenenfalls nach geraden und ungeraden Indizes.

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Transformieren Sie die Quadrik

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + (1,0,1,0)^T \cdot \underline{x} + \frac{1}{8} = 0$$

auf Normalform.

Aufgabe 7 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte -3, 0 und 2.

(i) Welcher Eigenwert von den dreien wird mit dem von-Mises-Verfahren (Potenzmethode) berechnet? Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ 2 Iterationen durch und geben Sie die Eigenwertnäherung unter Verwendung des Rayleigh-Quotienten an.

(ii) Warum ist die inverse Iteration zur Berechnung des betragskleinsten Eigenwertes nicht anwendbar?

(iii) $\mu = 2.5$ ist eine Näherung für den Eigenwert 2. Verbessern Sie mit der entsprechenden Variante des von-Mises-Verfahrens diesen Wert. Führen Sie 2 Iterationen ausgehend vom Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (5, -5, 1)^T$ durch und verwenden Sie den Rayleigh-Quotienten.