

Mathematische Methoden im Bauwesen III

9. Übung

Aufgabe 9.1

Auf $0 < x < 1$ sei das Anfangsrandwertproblem

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

gegeben. Bekannt sind die Werte

$$u(0, 0) = 0, \quad u(1/2, 0) = 1/2, \quad u(1, 0) = 1$$

zum Zeitpunkt $t = 0$. Ebenfalls bekannt ist das Verhalten für $x = 0$ und $x = 1$: Es gelte

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1 + t, \quad t > 0.$$

Bestimmen Sie $u(1/2, 1/2)$ unter Verwendung von $h = 1/2$ und einer größtmöglichen Zeitschrittweite k (bzw. einem Gitter mit möglichst wenig Punkten) mit dem α -Verfahren mit $\alpha = 1/4$.

Aufgabe 9.2

Das Wärmeleitungsproblem für $u(x, t)$ mit $0 \leq x \leq 2$, $t \geq 0$, der Form

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = |x - 1|, \quad u(0, t) = 1 + t^2, \quad u(2, t) = (t + 1)^2$$

soll mit dem α -Verfahren mit Wahl von $\alpha = 1/4$ und (Orts-)Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Gesucht ist die Lösung im Punkt $(1, 1)$. Verwenden Sie ein Gitter mit möglichst wenig Punkten.

Aufgabe 9.3

Auf dem Einheitsquadrat $G = (0; 1)^2$ betrachten wir das Laplace-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } G, \quad u = xy \text{ auf } \partial G.$$

Durch Diskretisierung mit zentralen Differenzenquotienten zur Schrittweite $h = 1/4$ in x - und y -Richtung entsteht ein Gleichungssystem.

- (i) Geben Sie dieses Gleichungssystem an, wenn Sie die Unbekannten zeilenweise durchnummerieren und die Gleichungen auch in dieser Reihenfolge anordnen.

- (ii) Warum greift das Zeilensummenkriterium nicht?
- (iii) Geben Sie das Maximum der Gitterfunktion an.

Aufgabe 9.4

Bestimmen Sie die zum RWP

$$-y'' = 1, \quad y(0) = y(3) = 0,$$

und dem Gitter H mit der Maschenweite $h = 1$ gehörige Gitterfunktion unter Verwendung eines zentralen Differenzenquotienten für die 2. Ableitung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $y(x) = -\frac{x(x-3)}{2}$ (in den Gitterpunkten). Was sagen Sie dazu?

Aufgabe 9.5

Wieviele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_{i,j} + \frac{1}{4}(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) &= 0, & i, j &= 1, 2, \dots, 99, \\ x_{i,j} - i \cdot j &= 0 \text{ für } i, j \in \{0, 100\}? \end{aligned}$$

Berechnen Sie für eine Lösung dieses Gleichungssystems den Wert der größten Komponenten.

Aufgabe 9.6

Die RWA

$$y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

(DGL des hängenden Seiles) ist näherungsweise mit dem Schießverfahren zu lösen. Benutzen Sie dazu das Crank-Nicholson-Verfahren auf einem Gitter der Schrittweite $h = 1/3$ sowie die Anfangssteigungen $s_0 = 1/2$ und $s_1 = 1/3$. Verbessern Sie das Ergebnis durch einen Schritt mit der Regula falsi.

Aufgabe 9.7

Die Randwertaufgabe

$$u'' = \sqrt{u}, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 3,$$

soll numerisch mit dem Schießverfahren gelöst werden. Wählen Sie anfangs die Schussrichtungen $s_0 = 1.5$ und $s_1 = 1.6$. Zur Lösung der jeweiligen Anfangswertaufgabe soll das Polygonzugverfahren mit $h = 0.2$ verwendet werden. Führen Sie einen Schritt mit der Regula falsi durch und geben Sie die entstehende Gitterfunktion an.

Bearbeitungsziel: Donnerstag, 20.12.2007