Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

31.01.2008

Mathematische Methoden im Bauwesen III

14. Übung

Aufgabe 14.1

Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline zu den Interpolationsdaten

1) $(-1,0)$, $(0,2)$, $(1,12)$,
2) $(0,1)$, $(2,3)$,
3) $(-2,0)$, $(0,0)$, $(1,3)$

durch kubischen Ansatz auf dem Referenzelement.

Lösung:

a) $(-1;0)$, $\quad (0;2)$; $\quad (1;12)$

Es sind $h_0 = h_1 = 1$, also

$$S_1 = S_2 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$G = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 12+12 & -6+6 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & -6+6 & 4+4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir streichen die Zeilen 1, 3, 5 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underline{U} = \underline{0}.$$

Die Spalten 1, 3, 5, die zu den Knotenwerten u_0, u_1, u_2 passen, bringen wir auf die rechte Seite:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underline{U} = \begin{pmatrix} -6u_0 + 6u_1 \\ -6u_0 + 6u_2 \\ -6u_1 + 6u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 72 \\ 60 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underline{U} = \begin{pmatrix} 6 \\ 36 \\ 30 \end{pmatrix},$$

also das Gleichungssystem, das wir auch schon durch die Eulersche Randwertaufgabe erhalten haben.

b) $(0,1)$, $(2,3)$

Es ist $h_0 = 2$, also

$$S = G = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 \\ 12 & 16 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 12 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Dann bleibt nach Streichen der Zeilen 1,3 und Schreiben der Spalten 1, 3 auf die rechte Seite das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12u_0 + 12u_1 \\ -12u_0 + 12u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu lösen, das offensichtlich die Lösung $(1,1)$ besitzt. Damit erhalten wir als Gesamtlösung

$$\begin{aligned} u(x) &= N_1(0,x) + N_2(0,x) + 3N_3(0,x) + N_4(0,x) \\ &= (1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3) + (x - x^2 + \frac{1}{4}x^3) + (\frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^3) + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3) \\ &= 1 + x. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hatten wir auch schon über die Betrachtung der Eulerschen RWA erhalten.

c) $(-2,0)$, $(0,0)$, $(1,3)$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen lauten:

$$S_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 \\ 12 & 16 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 12 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{27}{2} & \frac{9}{2} & -12 & 6 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{9}{2} & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Streichen der Zeilen 1, 3, 5 und Schreiben der Spalten 1, 3, 5 auf die rechte Seite liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}u_0 + \frac{3}{2}u_1 \\ -\frac{3}{2}u_0 - \frac{9}{2}u_1 + 6u_2 \\ -6u_1 + 6u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem, das wir durch Betrachtung der Euler-RWA erhalten haben.

Aufgabe 14.2
Gegeben ist die RWA

$$-(1+x)u'' - u' = x + \frac{1}{4},\ y(0) = 0,\ y(2) = 2.$$

Bestimmen Sie die zu dieser RWA gehörige Variationsaufgabe, und lösen Sie diese näherungsweise durch kubischen Polynomansatz; dabei ist das Intervall in zwei Teilintervalle der Länge 1 aufzuteilen.

Anmerkung: Gemeint ist der kubische Polynomansatz mit Freiheitsgraden in den Funktions- und Ableitungswerten an den Intervallenden, also den Freiheitsgraden der Spline-Approximation.

Lösung:

Es ist gegeben

$$0 \;=\; x + \frac{1}{4} + (1+x)\,u'' + u' \stackrel{!}{=} F_u - \frac{\partial}{\partial x}\,F_{u'}.$$

Etwas geschickter schreiben wir:

$$0 \;=\; x + \frac{1}{4} + \frac{\partial}{\partial x}\,[u'(1+x)].$$

Damit erhalten wir

$$F(x,u,u') = (x+\frac{1}{4})\,u - \frac{1}{2}\,(1+x)\,(u')2$$

und somit das Variationsproblem

$$\boxed{J(u) = \int_0^2 [(x+\frac{1}{4})\,u - \frac{1}{2}\,(1+x)\,(u')^2]\,dx \stackrel{!}{=} \min, \qquad u(0) = 0, u(2) = 2.}$$

Im Gegensatz zur Variation von $\int_a^b (u'')^2\,dx$ haben wir also nun ein Problem der Form

$$J(u) = \int_a^b [g(x)\,u + \frac{1}{2}\,s(x)\,(u')^2]\,dx$$

zu betrachten. Wir betrachten jeden Summanden einzeln:

(I) Es liegt vor ein Problem der Form:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,u(x)\,dx.$$

Mit der üblichen Transformation wird daraus

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,u(x)\,dx &= \int_0^1 g(\xi(t))\,u(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt\\ &= h_k \int_0^1 g(\xi(t))\,u(\xi(t))\,dt\\ &= h_k \int_0^1 \hat g(t)\,\hat u(t)\,dt.\end{aligned}$$

Das Auftauchen von $\hat g$ im Integranden erschwert hier die Sache. Im Allgemeinen können wir nicht davon ausgehen, dass eine Stammfunktion von $\hat g \hat u$ zu finden ist. Bei der Programmierung sind wir ohnehin auf Quadraturformeln angewiesen. Bei Verwendung einer Quadraturformel mit Gewichten A_i und Knoten t_i erhielten wir also:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,u(x)\,dx = h_k \sum_{i=1}^{n} A_i\, g(\xi(t_i))\,\hat u(t_i).$$

Bemerkung: Da g auf $[x_k; x_{k+1}]$ definiert ist, werten wir g im *transformierten* Kubaturpunkt aus!

Eine andere Variante besteht darin, den Mittelwert von g auf I_k zu verwenden, also $g(x)$ durch die Konstante

$$g_k := \frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx$$

zu ersetzen, was wir hier auch tun wollen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,u(x)\,dx &\approx g_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)\,dx\\ &= g_k\,h_k \int_0^1 \hat u(t)\,dt\\ &= g_k\,h_k \int_0^1 \underline{u}_k^T\,\underline{N}^T\,dt\\ &= \underline{u}_k^T\,g_k\,\underbrace{h_k \int_0^1 \underline{N}^T\,dt}_{\underline{b}_k}.\end{aligned}$$

Der Vektor b_k ist berechenbar, erlautet:

$$b_k = \frac{h_k}{12}\,(6, 1, 6, -1)^T.$$

Konkret heißt das nun für uns, dass wir zu berechnen haben:

$$\int_0^2 (x + \frac{1}{4})\,u(x)\,dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{4})\,u(x)\,dx + \int_1^2 (x + \frac{1}{4})\,u(x)\,dx.$$

Dann ist $h_0 = h_1 = h = 1$, und es gilt:

$$g_0 := \int_0^1 (x + \frac{1}{4})\,dx = [\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x]_0^1 = \frac{3}{4}, \qquad g_1 := \int_1^2 (x + \frac{1}{4})\,dx = [\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x]_1^2 = \frac{7}{4}.$$

Damit erhalten wir wegen

$$\underline{b}_0 = \underline{b}_1 = \frac{1}{12}\,(6,1,6,-1)^T$$

als Ergebnis:

$$\int_0^1 (x+\frac{1}{4})\,u(x)\,dx \quad\hookrightarrow\quad \underline{u}_0^T\,\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{12}\,(6,1,6,-1)^T = \underline{u}_0^T\,\frac{1}{16}\,(6,1,6,-1)^T,$$

$$\int_1^2 (x+\frac{1}{4})\,u(x)\,dx \quad\hookrightarrow\quad \underline{u}_1^T\,\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{12}\,(6,1,6,-1)^T = \underline{u}_1^T\,\frac{7}{48}\,(6,1,6,-1)^T.$$

Diese lokalen Vektoren fassen wir zu einem globalen Vektor zusammen in der Form:

$$\int_0^2 (x+\frac{1}{4})\,u(x)\,dx \hookrightarrow < \begin{pmatrix} u_0\\ u_0'\\ u_1\\ u_1'\\ u_2\\ u_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6}{16}\\ \frac{1}{16}\\ \frac{6}{16}+\frac{42}{48}\\ -\frac{1}{16}+\frac{7}{48}\\ \frac{42}{48}\\ -\frac{7}{48} \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} u_0\\ u_0'\\ u_1\\ u_1'\\ u_2\\ u_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/8\\ 1/16\\ 5/4\\ 1/12\\ 7/8\\ -7/48 \end{pmatrix} >$$

(II) Nun haben wir noch den zweiten Teil

$$\int_0^2 s(x)\,[u'(x)]^2\,dx$$

zu integrieren. Auch hier ersetzen wir zur Vereinfachung $h(x)$ durch den konstanten Mittelwert

$$s_k := \frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} s(x)\,dx.$$

Wir erhalten dann wieder:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} s(x)\,[u'(x)]^2\,dx \approx s_k\,h_k\int_0^1 [u'(\xi(t))]^2\,dt = s_k\,\frac{1}{h_k}\int_0^1 [\hat{u}'(t)]^2\,dt.$$

Da sich $[\hat{u}'(t)]^2$ schreiben läßt als

$$[\hat{u}'(t)]^2 = \underline{u}_k^T\,\underline{\hat{N}}'\,[\underline{u}_k^T\,\underline{\hat{N}}']^T = \underline{u}_k^T\,\underline{\hat{N}}'\,\underline{\hat{N}}'^T\,\underline{u}_k,$$

erhalten wir somit:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} s(x)\,[u'(x)]^2\,dx \approx \underline{u}_k^T\,s_k\,\underbrace{\frac{1}{h_k}\int_0^1 \underline{\hat{N}}'\,\underline{\hat{N}}'^T\,dt}_{S_1}\,\underline{u}_k.$$

Die Berechnung von S_1 ergibt:

$$\frac{1}{30\,h_k}\begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3\\ 3 & 4 & -3 & -1\\ -36 & -3 & 36 & -3\\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir haben zu berechnen:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx + \int_1^2 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx.\right).$$

Dann ist wieder $h_0 = h_1 = h$, und es gilt:

$$s_0 = \int_0^1 -(1+x)\,dx = -\frac{3}{2}, \qquad s_1 = \int_1^2 -(1+x)\,dx = -\frac{5}{2}.$$

Folglich erhalten wir lokal auf jedem Teilintervall:

$$\int_0 1-(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx \quad \hookrightarrow \quad \underline{u}_0^T\,(-\frac{1}{20})\begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\underline{u}_0,$$

$$\int_1^2 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx \quad \hookrightarrow \quad \underline{u}_1^T\,(-\frac{1}{12})\begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\underline{u}_1.$$

Diese lokalen quadratischen Formen fassen wir zu einer globalen zusammen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^2 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx \;&=\; \frac{1}{2}\left(\int_0^1 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx \;+\; \int_1^2 -(1+x)\,[u'(x)]^2\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix}^T (-\frac{1}{20})\begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix} + \right. \\
&\qquad \left. \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}^T (-\frac{1}{12})\begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -9/5 & -3/20 & 9/5 & -3/20 & 0 & 0 \\ -3/20 & -1/5 & 3/20 & 1/20 & 0 & 0 \\ 9/5 & 3/20 & -24/5 & -1/10 & 3 & -1/4 \\ -3/20 & 1/20 & -1/10 & -8/15 & 1/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & 3 & 1/4 & -3 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/12 & 1/4 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}.
$$

Insgesamt erhalten wir somit ein Variationsproblem der Form

$$
J(u) \approx \frac{1}{2}\,\underline{U}^T\,G\,\underline{U} + \underline{U}^T\,\underline{b} = Q(\underline{U}).
$$

Die notwendige Bedingung $Q'(\underline{U}) = \underline{0}$ liefert

$$
G\underline{U} = -\underline{b}.
$$

Aus der Matrix G streichen wir die Zeilen 1 und 5, da $u_0 = 0$ und $u_2 = 2$ bekannt sind. Dann erhalten wir:

$$
\begin{pmatrix} -3/20 & -1/5 & 3/20 & 1/20 & 0 & 0 \\ 9/5 & 3/20 & -24/5 & -1/10 & 3 & -1/4 \\ -3/20 & 1/20 & -1/10 & -8/15 & 1/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/12 & 1/4 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 5/4 \\ 1/12 \\ -7/48 \end{pmatrix}.
$$

Die Spalten 1 und 5 von G bringen wir nun auf die andere Seite und erhalten dann unter Berücksichtigung, daß $u_0 = 0$ gilt, das System

$$
\begin{pmatrix} -1/5 & 3/20 & 1/20 & 0 \\ 3/20 & -24/5 & -1/10 & -1/4 \\ 1/20 & -1/10 & -8/15 & 1/12 \\ 0 & -1/4 & 1/12 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 5/4 \\ 1/12 \\ -7/48 \end{pmatrix} - u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ -19/4 \\ -5/12 \\ -31/48 \end{pmatrix}
$$

mit der Lösung

$$
\begin{pmatrix} u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/52 \\ 261/286 \\ 513/572 \\ 65/44 \end{pmatrix}.
$$

Mit diesen Koeffizienten (und u_0 und u_1) wird dann die Lösung auf jedem Intervall wie üblich zusammengesetzt. Zur Erinnerung: In der erzielten Lösung stecken mehrere mögliche Fehlerquellen:

- Ist der kubische Ansatz geeignet?
- Ist die Wahl der Freiheitsgrade sinnvoll, d.h. C^1-Übergänge?
- Ist die Mittelwertbildung für die nicht-konstanten Koeffizienten erlaubt, d.h. liegt der Fehler in der Größenordnung des Gesamtverfahrensfehlers?

Aufgabe 14.3
Lösen Sie das Variationsproblem

$$J(u) = \int_0^3 [3x^2(u')^2 + 2xu]\, dx \overset{!}{=} stat., \quad u(0) = 2, \quad u(3) = 1,$$

durch kubische Polynomapproximation auf der Zerlegung $[0;3] = [0;1] \cup [1;3]$ unter Hermite-Interpolationsbedingungen. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Approximieren Sie die Koeffizientenfunktionen durch Konstanten mit Hilfe des Integralmittels.

b) Bestimmen Sie die entstehenden quadratischen Formen auf den beiden Teilintervallen.

c) Welche Dimension hat die Gesamtsteifigkeitsmatrix? Können Sie sie angeben?

Lösung:

a) Zunächst ist

$$\int_0^1 3x^2\, dx = 1, \quad \int_0^1 2x\, dx = 1, \quad \int_1^3 3x^2\, dx = 26, \quad \int_1^3 2x\, dx = 8.$$

b) Wir lösen nun

$$J(u) \approx \int_0^1 (u')^2\, dx + 26 \int_1^3 (u')^2\, dx + \int_0^1 u\, dx + 8 \int_1^3 u\, dx.$$

Dann erhalten wir auf $[0;1]$ die quadratische Form

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix}^T \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix},$$

und auf $[1;3]$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}^T \frac{13}{30} \begin{pmatrix} 36 & 6 & -36 & 6 \\ 6 & 16 & -6 & -4 \\ -36 & -6 & 36 & -6 \\ 6 & -4 & -6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \end{pmatrix}.$$

c) Die Gesamtsteifigkeitsmatrix hat dann die Dimension 6x6.

c) Fassen wir dies zusammen zu einer quadratischen Form, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}^T \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -36 & -3 & 504 & 75 & -468 & 78 \\ 3 & -1 & 75 & 212 & -78 & -52 \\ 0 & 0 & -468 & -78 & 468 & -78 \\ 0 & 0 & 78 & -52 & -78 & 208 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 112 \\ 31 \\ 96 \\ -32 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}.$$