Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

18.10.2007

Mathematische Methoden im Bauwesen III

1. Übung

Aufgabe 1.1

Für $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist die *Vandermondsche Determinante* V definiert als:

$$V = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch vollst. Induktion: $V = \prod_{i,j=1,i<j}^{n}(x_i - x_j)$.

Hinweis: $x^n - y^n = (x-y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,y + \ldots + x\,y^{n-2} + y^{n-1})$.

Aufgabe 1.2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' = f(y, y'), \quad y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1.$$

Unter der Voraussetzung $\alpha_1 \neq 0$ existiert die Umkehrfunktion von y in einer Umgebung von x_0. Zeigen Sie, dass sich aus der gegebenen Dgl. eine Dgl. für die Umkehrfunktion gewinnen lässt, in der die Funktion $x(y)$ nicht auftritt, sog. „Variablentausch“.Hinweis: Gehen Sie aus von der bekannten Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und wenden Sie die Kettenregel an.

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass sich durch Variablentausch das AWP

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

in das AWP erster Ordnung

$$v' = \frac{v}{y}, \quad v(3) = 1,$$

transformieren lässt. Geben Sie die Lösung des Ausgangsproblems an.

Aufgabe 1.4
Zeigen Sie, dass sich die nichtlineare Dgl.

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^n \qquad \text{(Bernoullische Dgl.)}$$

in die lineare Dgl.

$$z' = (1-n) \cdot p(x) \cdot z + (1-n) \cdot r(x)$$

transformieren lässt. Verwenden Sie dazu die Substitution

$$z(x) = [y(x)]^{1-n}.$$

Aufgabe 1.5
Zeigen Sie, dass die Riccatische Dgl. der Form

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 + q(x)$$

durch den Ansatz

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

in eine Bernoullische Dgl. zurückgeführt werden kann. Dabei ist $u(x)$ eine bekannte spezielle Lösung der Riccati-Dgl.

Aufgabe 1.6

(i) Sind die Funktionen f und g linear abhängig bzw. linear unabhängig, falls
  a) $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$,
  b) $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$ ist?

(ii) Die Funktionen $y_1, y_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = x^3$ sind linear unabhängig. Berechnen Sie ihre Wronski–Determinante an der Stelle $x = 0$. Wie paßt das alles zusammen?