Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Testat 2 zu MB III am 24.11.2006

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Aufgabe 2.1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die inhomogene Wärmeleitungsgleichung in u

$$\begin{aligned} u_t - a^2\, u_{xx} &= F(x,t), && t>0, \quad 0<x<l, \\ u(x,0) &= f(x) && 0, \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= g(t), && t>0, \\ u(l,t) &= h(t), && t>0, \end{aligned}$$

in eine Wärmeleitungsgleichung in $\tilde{u}$ mit homogenen Randbedingungen transformieren läßt mittels

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &:= \frac{1}{l}\left[(l-x)\cdot g(t) + x\cdot h(t)\right], \\ \tilde{u}(x,t) &:= u(x,t) - u_0(x,t), \\ \tilde{F}(x,t) &:= F(x,t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ \tilde{f}(x) &:= f(x) - u_0(x,0). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Geben Sie die Lösung des Laplace-Problems im $\mathbb{R}^2$ auf einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius $R=2$ an, wenn Sie

a) das innere Dirichlet-Problem zur Randfunktion $g(\varphi) = 1 - \sin\varphi + \cos\varphi$,

b) das äußere Dirichlet-Problem zur Randfunktion $g(\varphi) = 1 + \sin\varphi - \cos\varphi$

lösen sollen. Transformieren Sie zurück auf kartesische Koordinaten.

Aufgabe 2.3 (3 Punkte)

Können Sie eine Lösung des Laplace-Problems im $\mathbb{R}^2$ auf einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius $R=2$ mit den reinen Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}} = 1 + \sin^3\varphi\ \cos\varphi$$

angeben?

Aufgabe 2.4 (3 Punkte)

Leiten Sie die Iterationsvorschrift des Eulerschen Polygonzugverfahrens (expliziter Euler) her, d.h. geben Sie den Weg vom Ausgangsproblem $y' = f(x,y),\ y(a) = y_0$, bis zur Iterationsvorschrift des Verfahrens an und geben Sie ggf. Erläuterungen.