Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Zu $f(x) = \cos(2\pi x)$, $0 \le x \le 1$, ist die Interpolierende p aus dem Raum der Polynome 2. Grades auf $[0; 1]$ zu bestimmen. Als Freiheitsgrade werden dabei gewählt:

$$\Gamma_1(u) = u(0), \quad \Gamma_2(u) = u(1), \quad \Gamma_3(u) = \int_0^1 u(x)\,dx.$$

a) Bestimmen Sie die kanonische Basis $\{N_1,\, N_2,\, N_3\}$ mit der Eigenschaft: $\Gamma_i(N_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

b) Geben Sie mit Hilfe der N_i die gesuchte Interpolierende p an.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Variationsproblems:

$$J(u) = \int_0^\pi [32u^2 + \frac{1}{2}\,(u'')^2]\,dx \overset{!}{=} stat.,\; u(0) = u'(0) = u(\pi) = 0,\; u'(\pi) = 2.$$

Hinweis: $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Die Tschebyscheff-Polynome sind rekursiv definiert durch

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, -1 \le x \le 1.$$

a) Zeigen Sie, dass aus T_0, T_1, T_2 eine Orthonormalbasis der quadratischen Polynome auf $[-1; 1]$ bzgl. des Skalarproduktes

$$< f, g >:= \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

gebildet werden kann.

b) Wie lautet die Bestapproximation für $f(x) = x^3$?

Benötigte Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x,$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{8}x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\arcsin x.$$

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2xy_1^2 - x^2 y_2 \\ \\ 3y_2^2 - x\sqrt{y_1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{y}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 2 \end{pmatrix},$$

soll das α-Verfahren mit $\alpha = 9/10$ verwendet werden. Führen Sie einen Schritt zur Schrittweite $h = 1/2$ mit dem Verfahren durch. Zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems verwenden Sie das Fixpunktverfahren, für das Sie eine Iteration durchführen. Zur Bestimmung eines Startwertes für das Fixpunktverfahren benutzen Sie das explizite Euler-Verfahren.

Aufgabe 5 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Berechnen Sie für

$$\underline{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \eta(x,y,z) = xyz(z-1)$$

und

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_Z < \underline{a}, \eta' > \, dZ.$$

Aufgabe 6 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Das Wärmeleitungsproblem $u_t = u_{xx}$, $x \in [0;1]$, $t > 0$, mit Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für $t \geq 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = x(1-x)$, $x \in [0;1]$, sei gegeben. Das Problem soll mit dem α-Verfahren mit $\alpha = 1/4$ diskretisiert werden. Als Ortsschrittweite wird $h = 1/3$ gewählt. Wieviele Zeitschritte benötigen Sie mindestens, um $u(1/3,1)$ und $u(2/3,1)$ berechnen zu können? Geben Sie das entstehende Gleichungssystem für die Berechnung der Unbekannten in der ersten Zeitschicht an, d.h. Matrix und rechte Seite. Das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.