

Mathematische Methoden im Bauwesen III

9. Übung

Aufgabe 9.1

Auf dem Einheitsquadrat $G = (0; 1)^2$ betrachten wir das Laplace-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } G, \quad u = xy \text{ auf } \partial G.$$

Durch Diskretisierung mit zentralen Differenzenquotienten zur Schrittweite $h = 1/4$ in x - und y -Richtung entsteht ein Gleichungssystem.

- (i) Geben Sie dieses Gleichungssystem an, wenn Sie die Unbekannten zeilenweise durchnummerieren und die Gleichungen auch in dieser Reihenfolge anordnen.
- (ii) Warum greift das Zeilensummenkriterium nicht?
- (iii) Geben Sie das Maximum der Gitterfunktion an.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie die zum RWP

$$-y'' = 1, \quad y(0) = y(3) = 0,$$

und dem Gitter H mit der Maschenweite $h = 1$ gehörige Gitterfunktion. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $y(x) = -\frac{x(x-3)}{2}$ (in den Gitterpunkten). Was sagen Sie dazu?

Aufgabe 9.3

Wieviele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_{i,j} + \frac{1}{4}(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) &= 0, & i, j &= 1, 2, \dots, 99, \\ x_{i,j} - i \cdot j &= 0 \text{ für } i, j \in \{0, 100\}? \end{aligned}$$

Berechnen Sie für eine Lösung dieses Gleichungssystems den Wert der größten Komponenten.

Aufgabe 9.4

Die RWA

$$y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

(DGL des hängenden Seiles) ist näherungsweise mit dem Schießverfahren zu lösen. Benutzen Sie dazu das Crank-Nicholson-Verfahren auf einem Gitter der Schrittweite $h = 1/3$ sowie die Anfangssteigungen $s_0 = 1/2$ und $s_1 = 1/3$. Verbessern Sie das Ergebnis durch einen Schritt mit der Regula falsi.

Aufgabe 9.5

Die Randwertaufgabe

$$u'' = \sqrt{u}, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 3,$$

soll numerisch mit dem Schießverfahren gelöst werden. Wählen Sie anfangs die Schussrichtungen $s_0 = 1.5$ und $s_1 = 1.6$. Zur Lösung der jeweiligen Anfangswertaufgabe soll das Polygonzugverfahren mit $h = 0.2$ verwendet werden. Führen Sie einen Schritt mit der Regula falsi durch und geben Sie die entstehende Gitterfunktion an.

Bearbeitungsziel: Mittwoch, 20.12.2006