

Mathematische Methoden im Bauwesen III

1. Übung

**Aufgabe 1.1**

Für  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ist die *Vandermondsche Determinante*  $V$  definiert als:

$$V = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch vollst. Induktion:  $V = \prod_{i,j=1, i < j}^n (x_i - x_j)$ .

Hinweis:  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ .

**Aufgabe 1.2**

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' = f(y, y'), \quad y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1.$$

Unter der Voraussetzung  $\alpha_1 \neq 0$  existiert die Umkehrfunktion von  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$ . Zeigen Sie, dass sich aus der gegebenen Dgl. eine Dgl. für die Umkehrfunktion gewinnen lässt, in der die Funktion  $x(y)$  nicht auftritt, sog. „Variablentausch“. Hinweis: Gehen Sie aus von der bekannten Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und wenden Sie die Kettenregel an.

### Aufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass sich durch Variablentausch das AWP

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

in das AWP erster Ordnung

$$v' = \frac{v}{y}, \quad v(3) = 1,$$

transformieren lässt. Geben Sie die Lösung des Ausgangsproblems an.

### Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass sich die nichtlineare Dgl.

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^n \quad (\text{Bernoullische Dgl.})$$

in die lineare Dgl.

$$z' = (1 - n) \cdot p(x) \cdot z + (1 - n) \cdot r(x)$$

transformieren lässt. Verwenden Sie dazu die Substitution

$$z(x) = [y(x)]^{1-n}.$$

### Aufgabe 1.5

Zeigen Sie, dass die Riccatische Dgl. der Form

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 + q(x)$$

durch den Ansatz

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

in eine Bernoullische Dgl. zurückgeführt werden kann. Dabei ist  $u(x)$  eine bekannte spezielle Lösung der Riccati-Dgl.

### Aufgabe 1.6

- (i) Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  linear abhängig bzw. linear unabhängig, falls
  - a)  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$ ,  $g(x) = |x|$ ,
  - b)  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$ ,  $g(x) = |x|$  ist?
- (ii) Die Funktionen  $y_1, y_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^3$  sind linear unabhängig. Berechnen Sie ihre Wronski-Determinante an der Stelle  $x = 0$ . Wie paßt das alles zusammen?

**Bearbeitungsziel:** Mi, 25.10.2006, 12.00 Uhr. Abgabe bei Sven Grönwäller, Raum M/524