

Aufgabe 1 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Wie lautet die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -\pi \leq x < \pi?$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Darstellung die Beziehungen

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots, \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \pm \dots$$

Hinweis: $\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{2x}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \sin(nx)$.

Aufgabe 2 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 8x \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Gegeben seien die Fläche F durch die Parameterdarstellung

$$\underline{\varphi} : [1; 4] \times [1; 9] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{\varphi}(x, y) = (x, y, \sqrt{2xy})^T,$$

und das Vektorfeld

$$\underline{a}(x, y, z) = (2x, 2y, \sqrt{2xy})^T.$$

- Berechnen Sie den Flächeninhalt von F .
- Welches Vorzeichen hat der Fluss $\int_F \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle dF$?

Aufgabe 4 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Lösen Sie für $x > 0$ die partielle Differentialgleichung

$$x^2 \cdot u_{xy} + 3y^2 u = 0, \quad u(1, 1) = 1/e, \quad u(1, 0) = 1,$$

durch einen Produktansatz.

Aufgabe 5 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

näherungsweise durch 1 Iteration mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs mit exakter Liniensuche. Verwenden Sie den Startvektor $\underline{x}_0 = (1, 1, 0)^T$. Konvergiert das Verfahren?

Aufgabe 6 (Handrechnung, kein Taschenrechner!!)

Gegeben sei ein Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 2 \\ 4d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $d \in \mathbb{R}$.

- (a) Kann man mit Hilfe des Zeilensummenkriteriums Werte für den Parameter d angeben, für die das Gesamtschrittverfahren bzw. das Einzelschrittverfahren für jeden Startvektor konvergieren? Begründen Sie die Antwort.
- (b) Geben Sie alle Werte von d an, für die das Gesamtschrittverfahren für jeden Startvektor konvergiert.
- (c) Führen Sie die Überlegungen von (b) für das Einzelschrittverfahren durch.