Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

15.12.2005

Mathematische Methoden im Bauwesen III

9. Übung

Aufgabe 9.1

Wir betrachten das lineare Problem

$$\underline{y}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -101 & 99 \\ 99 & -101 \end{pmatrix} \cdot \underline{y}, \quad \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösung des Problems an. Welche Schrittweitenbedingung müssen Sie einhalten, wenn Sie das explizite Euler-Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung benutzen wollen? Leiten Sie diese explizit her! Rechnen Sie auch explizit nach, dass beim impliziten Euler-Verfahren keine Schrittweitenbedingung einzuhalten ist.

Aufgabe 9.2

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit gewissen Anfangs- und Randbedingungen. Zur näherungsweisen Lösung dieser Aufgabe sei das 2-Schritt-Verfahren

$$\frac{1}{h^2}(a \cdot u_{i-1,j} + u_{ij} + b \cdot u_{i+1,j}) + \frac{1}{h}(c \cdot u_{i,j-1} + d \cdot u_{i,j+1}) = 0$$

mit zunächst unbekannten a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Bestimmen Sie, falls möglich, diese Unbekannten so, dass ein konsistentes Verfahren entsteht.

Aufgabe 9.3

Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0;1), \quad t \in (0, \frac{1}{8}),$$

mit den Anfangs- und Randwerten

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \text{ für } x \in (0;1), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ für } t \in (0; \frac{1}{8}).$$

Wählen Sie das Crank-Nicholson-Verfahren als Lösungsverfahren und als Schrittweiten $h = \frac{1}{4}$ im Ort und $k = \frac{1}{16}$ in der Zeit. Geben Sie die Gleichungssysteme explizit an, mit denen man die Werte in der Zeitschicht $j+1$ aus denen der Zeitschicht j erhält. Lösen Sie die Gleichungssysteme.

Die exakte Lösung lautet
$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 \cdot t}.$$
Vergleichen Sie die berechneten Resultate mit der exakten Lösung.

Aufgabe 9.4
Auf $0 < x < 1$ sei das Anfangsrandwertproblem
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$
gegeben. Bekannt sind die Werte
$$u(0,0) = 0, \quad u(1/2, 0) = 1/2, \quad u(1,0) = 1$$
zum Zeitpunkt $t = 0$. Ebenfalls bekannt ist das Verhalten für $x = 0$ und $x = 1$: Es gelte
$$u(0,t) = t, \qquad u(1,t) = 1 + t, \qquad t > 0.$$
Bestimmen Sie $u(1/2, 2/9)$ unter Verwendung einer größtmöglichen Zeitschrittweite k (bzw. einem Gitter mit möglichst wenig Punkten) mit dem α-Verfahren mit $\alpha = 1/4$. Bestimmen Sie weiterhin $u(1/2, 1/5)$ ebenfalls unter Verwendung einer größtmöglichen Zeitschrittweite k und $\alpha = 1/4$.

Aufgabe 9.5
Das Wärmeleitungsproblem
$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = |x - 1|, \quad u(0,t) = 1 + t^2, \quad u(2,t) = (t+1)^2$$
soll mit dem α-Verfahren mit Wahl von $\alpha = 1/4$ und (Orts-)Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Gesucht ist die Lösung im Punkt $(1, 1)$. Verwenden Sie ein Gitter mit möglichst wenig Punkten.

Aufgabe 9.6
Auf dem Einheitsquadrat $G = (0; 1)2$ betrachten wir das Laplace-Problem
$$\Delta u = 0 \text{ in } G, \qquad u = xy \text{ auf } \partial G.$$
Durch Diskretisierung mit zentralen Differenzenquotienten zur Schrittweite $h = 1/4$ in x- und y-Richtung entsteht ein Gleichungssystem.

(i) Geben Sie dieses Gleichungssystem an, wenn Sie die Unbekannten zeilenweise durchnumerieren und die Gleichungen auch in dieser Reihenfolge anordnen.

(ii) Warum greift das Zeilensummenkriterium nicht?

(iii) Geben Sie das Maximum der Gitterfunktion an.

Bearbeitungsziel: Mittwoch, 04.01.2006