Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

02.02.2006

Mathematische Methoden im Bauwesen III

14. Übung

Aufgabe 14.1

Zur Funktion $f : [-5, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(1+x2)}$ bestimme man die natürliche kubische Spline–Interpolierende zu den äquidistanten Stützstellen $x_k = -5 + 2k,\ k = 0, 1, \ldots, 5,$. Man stelle f zusammen mit dem Spline graphisch dar.

Aufgabe 14.2

Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline zu den Interpolationsdaten

1) $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 12)$,
2) $(0, 1)$, $(2, 3)$,
3) $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$.

Aufgabe 14.3

Ist $s : [0; 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \begin{cases} 2x - x3 & x < 1, \\ -\frac{5}{3} + 7x - 5x2 + \frac{2}{3}x3 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein natürlicher kubischer Spline?

Aufgabe 14.4

Berechnen Sie den natürlichen kubischen Spline zu den Aufgaben 14.2 direktaus der Variationsaufgabe, nicht aus der Eulerschen Randwertaufgabe.

Aufgabe 14.5

Gegeben ist die RWA

$$-(1 + x)u'' - u' = x + \frac{1}{4},\ y(0) = 0,\ y(2) = 2.$$

Bestimmen Sie die zu dieser RWA gehörige Variationsaufgabe, und lösen Sie diese näherungsweise durch kubischen Polynomansatz; dabei ist das Intervall in zwei Teilintervalle der Länge 1 aufzuteilen.

Anmerkung: Gemeint ist der kubische Polynomansatz mit Freiheitsgraden in den Funktions- und Ableitungswerten an den Intervallenden, also den Freiheitsgraden der Spline-Approximation.

Aufgabe 14.6

Sei I_k das Intervall $[x_k,\ x_{k+1}]$ der Länge h_k; seinen Mittelpunkt bezeichnen wir mit $x_{k+\frac{1}{2}}$; ferner bezeichne $u_k,\ u_{k+\frac{1}{2}}$ und u_{k+1} die Funktionswerte von u in diesen drei Knoten $x_k,\ x_{k+\frac{1}{2}}$ und x_{k+1}.

Gesucht ist das zu diesen Daten gehörige quadratische Interpolationspolynom. Dieses ist, analog dem Vorgehen in der Vorlesung dadurch zu bestimmen, daß die Basis des quadratischen Ansatzes

$$p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2$$

in eine geeignetere Basis überführt wird. Welche Eigenschaften haben die neuen Basisfunktionen $N_i(x_k, x)$? Kennen wir solche Funktionen? Skizzieren Sie diese Funktionen N_i für das Intervall $I_k = [0, 1]$.

Aufgabe 14.7

Lösen Sie die Aufgabe 14.6 für linearen Ansatz, indem der Mittelpunkt des Intervalls I_k außer Acht gelassen wird.

Aufgabe 14.8

Lösen Sie die Aufgabe 14.6 durch Polynomansatz 4ten Grades mit den zusätzlichen Interpolationsbedingungen $p_k'(x_k) = u_k'$ und $p_k'(x_{k+1}) = u_{k+1}'$.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Donnerstag, 09.02.2006