

| | |
|------------|----------|
| Name: | Vorname: |
| <hr/> | |
| Matr.-Nr.: | |

Aufgabe 4.1

(3 Punkte)

Betrachten Sie das Fixpunktproblem

$$x = \sqrt{x} + 1 =: \Phi(x).$$

- a) Begründen Sie, dass Φ auf dem Intervall $I = [2.5; 3.5]$ eine Selbstabbildung ist. Hinweis: $\sqrt{2.5} = 1.58$, $\sqrt{3.5} = 1.87$.
- b) Weisen Sie die Kontraktionseigenschaft für Φ auf I nach. Wie lautet die Kontraktionskonstante?
- c) Geben Sie die Iterationsvorschrift einer Folge an, die gegen den Fixpunkt z konvergiert.

Aufgabe 4.2

(2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_1$ an.
- b) Geben Sie $\|A\|_2$ an.

Aufgabe 4.3

(3 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Ist das Zeilensummenkriterium erfüllt?
- b) Zeigen Sie, dass $\|C_{GSV}\|_2 < 1$ gilt. Dabei ist C_{GSV} die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens. Welche Konsequenz hat dies?
- c) Berechnen Sie die erste Iterierte des Gesamtschrittverfahrens. Verwenden Sie als Startvektor dabei $\underline{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 4.4

(5 Punkte)

Die Signalfunktion $\tilde{f} : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

wird 2-periodisch zu einer Funktion f nach \mathbb{R} fortgesetzt. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f . Beachten Sie: Die Fortsetzung ist weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.